解答例

STEP III 2025、第 1 問

純粋数学 • ベータ関数の積分

> **STEP III 2025、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで行うことはすべて、置換（substitution）か恒等式（identity）$x+(1-x)=1$ のいずれかである。$x \mapsto 1-x$ という折り返しは p と q の役割を入れ替える。被積分関数（integrand）を $x+(1-x)$ で分けると、隣り合う値どうしが結びつく。$x=\sin^2\theta$ とおけば積分は三角関数の積分になり、$x=t/(1+t)$ とおけば $[0,1)$ が $[0,\infty)$ に引き伸ばされる。最後の積分は、それまでの結果を順につなげることで求まり、最終的には手計算できる $\sin^4\theta$ の積分に帰着する。

解答

小問 (i)

$u=1-x$ と置換すると $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$ であり、$x=0,1$ はそれぞれ $u=1,0$ に対応する。よって

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

小問 (ii)

右辺の 2 つの積分を足し合わせると

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[x+(1-x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q)\end{aligned}$$

となり、これを整理すれば $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$ を得る。

次に $q = p$ とおく。小問 (i) より $\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$ であるから

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

小問 (iii)

$x = \sin^2\theta$ とおくと、$\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ かつ $1 - x = \cos^2\theta$ である。θ が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、x は 0 から 1 まで増加し、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ はともに非負である。したがって符号の問題は生じず、$x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$、$(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$ となる。ゆえに

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

2 つ目の結果を示すには、$q = p$ とおき、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ を用いる。

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi}(\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi.$$

ただし $\phi = 2\theta$ である。

> **考えてみよう** $\mathrm{b}(p,\cdot)$ のような形をした $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の積分に戻すにはどうすればよいか。

$[0,\pi]$ 上の $\sin\phi$ のグラフは $\phi = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である（$\phi \mapsto \pi - \phi$ と置換すればわかる）。よって $[0,\pi]$ 上の積分は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上の積分の 2 倍である。また、三角関数による表示で $q = \frac{1}{2}$ とすると $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$ となるから

$$\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

したがって

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2})$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iv)

t が 0 から ∞ まで動くときに x が 0 から 1 まで動き、しかも $1-x$ が簡単な形になるようにしたい。$x = \dfrac{t}{1+t}$ はその両方を満たし、

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

である。t が 0 から ∞ まで増加するとき、x は 0 から 1 に向かって増加する。よって

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

小問 (v)

被積分関数を小問 (iv) と照らし合わせると、$p-1=\frac{3}{2}$ かつ $p+q=6$ であるから、$p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{7}{2}$ である。この積分は $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$ であり、これを段階的に簡約していく。

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}) &= \mathrm{b}(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{(i) より}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{(ii) より、} p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) && \text{(iii) より、} p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

最後に、三角関数による表示で $p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{1}{2}$ とすれば

$$\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ を 2 回用いると

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)=\tfrac{1}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta).$$

余弦の項は $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上で積分すると 0 になる（それらの原始関数（antiderivative）$\sin 2\theta$ と $\sin 4\theta$ は両端で 0 となる）。よって $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$ であり、$\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{1}{2})=\frac{3\pi}{8}$ である。ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

検算

- $p=q=1$ のとき、定義から $\mathrm{b}(1,1)=1$ であり、(ii) から $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$ が得られる。これは $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ を直接計算した値と一致する。
- 同じく $p=1$ のとき、小問 (iii) は $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ を与える。矛盾はない。
- 数値的には $3\pi/256\approx 0.036816$ であり、$t^{3/2}/(1+t)^6$ を $[0,\infty)$ 上でコンピュータにより直接数値積分すると、小数点以下多くの桁まで一致する。大きさの妥当性も確かめておこう。被積分関数は $t=\frac{1}{3}$ で最大値（約 0.034）をとり、その山の幅はおよそ 1 程度であるから、値が数百分の一程度になるのはもっともである。

よくある間違い

- (iv) で、$\mathrm{d}x$ から生じる因子 $(1+t)^{-2}$ を忘れ、誤った指数 $p+q-2$ を得てしまう。
- (iii) で、$(\sin 2\theta)^{2p-1}$ を θ について $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上でのみ積分し、$\phi=2\theta$ によって積分範囲が 2 倍になり $\mathrm{d}\theta$ が半分になることを忘れる。

► (v) で、p を $\frac{3}{2}+1$ ではなく指数 $\frac{3}{2}$ そのものと対応させてしまう。

STEP のその先へ

関数 b(p,q) はオイラー（Euler）のベータ関数（beta function）であり、通常 $B(p,q)$ と書かれる。これはガンマ関数（gamma function）と $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ によって結びついており、小問 (iii) の結果は Γ に関するルジャンドル（Legendre）の倍数公式（duplication formula）の一つの形である。$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ を用いれば、$3\pi/256$ を 1 行で導くことができる。ベータ関数は確率論にも、ベータ分布（beta distribution）の正規化定数（normalising constant）として現れる。このような積分についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、ベータ分布については Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。