解答例

STEP II 2025、第 9 問

力学 ・ 衝突と放物運動

STEP II 2025、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

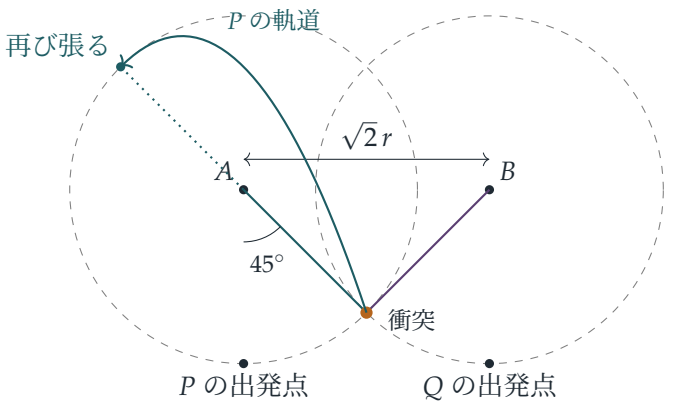
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

対称性がほとんどの仕事をしてくれる。2 つの質点は AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）上で出会うので、衝突するときの位置と速さが決まる。衝突の直後にはそれぞれの糸がたるむので、つり下げ点からの距離が再び r に戻るまで、各質点は通常の放物運動（projectile motion）をする物体である。この距離の条件を書き下すと、t についての四次方程式（quartic）が得られる。三重根（triple root）には物理的な意味がある。質点は円に沿う向きに進みながら円周に達するので、糸は衝撃なしに張るのである。

解答

モデル：P と Q は質量 m の質点（衝突については小さくなめらかな球）であり、糸は軽く伸び縮みせず、空気抵抗はないとする。P を左側に置いて A からつり下げ、A を通り、x 軸を水平（B に向かう向き）、y 軸を鉛直上向きにとる。



図は、小問 (iv) の特別な場合における衝突後の P の飛行を示している。このとき P は、反対側の水平より 45° 上の点で自分の円に戻る。

小問 (i)

設定は AB の垂直二等分線に関して対称なので、2 つの質点はその上で出会う。このとき各質点は最下点から水平に $\frac{1}{2}\sqrt{2}r = r\sin 45°$ だけ移動しているので、各糸は鉛直下向きと 45° の角をなす。各質点は $r - r\cos 45° = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ だけ上昇している。この点までは糸は張っており、その張力（tension）は仕事をしないので、エネルギー保存則（conservation of energy）により、衝突直前の速さ v は

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

を満たす。（質点がここまで到達するためには $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$ が必要である。）

各質点は水平と 45° の角をなして自分の円に沿って運動しているので、

$$\text{速度}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{速度}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}}, \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

である。2 つの質点は同じ高さで出会うので、中心を結ぶ直線は水平であり、両者の間にはたらく力積（impulse）も水平である。したがって速度の鉛直成分は変わらない。水平方向では運動量（momentum）は大きさが等しく向きが逆なので、合計は衝突の前後ともに 0 である。するとニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、各質点は近づく速さの e 倍ではね返る。衝突の直後には

$$\text{水平方向の速さ} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{鉛直成分} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\text{（上向き）},$$

であり、P は Q から遠ざかる向き、すなわち左向きに運動している。

? **考えてみよう** 衝突の間に、糸も力積を及ぼしうるだろうか。

及ぼさない。糸は引くことしかできず、しかも糸に沿った向きにしか引けない。衝突の直後、P は A に対して $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ の位置にあり、速度は $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$ である。その $\overrightarrow{AP}$ 方向の成分は $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$ なので、P は A に近づく向きに運動している。糸はただちにたるみ、衝撃的な張力が必要になることはない。

小問 (ii)

t を衝突の瞬間から測る。糸が再び張るまで P は放物運動をするので、A に対して

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。糸が張るのはちょうど $x^2 + y^2 = r^2$ のときである。$\sqrt{2}\,x$ と $\sqrt{2}\,y$ が現れるように 2 を掛けると

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

が得られる。これは衝突の瞬間にまだ糸が張っている $t = 0$ で成り立つので、求める時刻は 0 でない根である。対称性により、Q も同じ瞬間に同じことになる。2 つの質点は水平方向に互いに離れていくので、その前に再び衝突することはない。

小問 (iii)

展開して $2r^2$ を消去すると

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4 - \sqrt{2}\,gv\,t^3 + \big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t^2 - 2(1+e)rv\,t = 0.$$

となる。$t \neq 0$ で割ると三次方程式が残る。ここで

$$\frac{z}{c} = \frac{vt}{r} \cdot \frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \frac{gt}{\sqrt{2}\,v}, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{\sqrt{2}\,v}{g} \cdot \frac{z}{c}.$$

である。これを代入し、三次方程式全体を $\sqrt{2}\,v^3/g$ で割る。$w = z/c$ と書くと、各項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3, \\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2, \\
\big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \left(1 + e^2 + \frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\right)w = \left(\frac{2}{c} + 1 + e^2\right)w, \\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e) = -\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{2}{c} = \dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$ を用いた。これが求める方程式

$$\left(\frac{z}{c}\right)^3 - 2\left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{2}{c} + 1 + e^2\right)\left(\frac{z}{c}\right) - \frac{2}{c}(1+e) = 0.$$

である。

小問 (iv)

w についての三次方程式が三重根 α をもつならば、それは $(w-\alpha)^3 = w^3 - 3\alpha w^2 + 3\alpha^2 w - \alpha^3$ でなければならない。係数を比較すると

$$3\alpha = 2, \qquad 3\alpha^2 = \frac{2}{c} + 1 + e^2, \qquad \alpha^3 = \frac{2}{c}(1+e).$$

である。よって $\alpha = \frac{2}{3}$ である。$k = 2/c$ とおく。すると $k = \frac{4}{3} - 1 - e^2 = \frac{1}{3} - e^2$ であり、最後の式は

$$\left(\tfrac{1}{3} - e^2\right)(1+e) = \tfrac{8}{27} \iff 27e^3 + 27e^2 - 9e - 1 = 0 \iff (3e-1)(9e^2+12e+1) = 0.$$

となる。二次の因数の根は $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$ であり、どちらも負なので、反発係数（coefficient of restitution）にはなりえない。したがって $e = \frac{1}{3}$ である。すると $k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ なので $c = 9$ であり、

$$v^2 = \frac{c\,rg}{\sqrt{2}} = \frac{9rg}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

となって、示すべき結果が得られる。

考えてみよう 重根は運動について何を語っているのだろうか。

$D(t) = x^2 + y^2 - r^2$ とおく。正の因子を除いて、D は $w(w-\alpha)^3$ に等しい。これは $0 < w < \alpha$ で負なので、糸が張るまで P は自分の円の厳密に内側にとどまる。α は重根なので、そこでは $D' = 0$ でもある。ところが $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$ なので、その瞬間の速度の糸方向の成分は 0 である。つまり質点は円に沿う向きに運動しながら到達する。衝撃的な張力は糸に沿ってはたらき、速度の糸方向の成分を取り除くためにしか必要にならない。ここではそのような成分がないので、力積は生じず、速度は変化せず、運動エネルギーも失われない。

小問 (v)

エネルギーが失われるのは衝突のときだけである。衝突から円の最下点までの間、仕事をするのは重力だけである。飛行中は張力がなく、糸の張り方は衝撃を伴わず、その後は張力が運動の向きに垂直だからである。衝突の直後、速さの 2 乗は

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

であり、質点は最下点より $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ だけ上にある。したがって

$$U^2 = \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\,rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}\,rg.$$

である。

下降の途中で糸が張ったままであることも確かめておくべきである。$w = \frac{2}{3}$ のとき $t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$ である。これを代入すると、位置は $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$、速度は $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$ となる。よって P は、B と反対側の水平より 45° 上の点で、速さの 2 乗 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$ で自分の円に戻る。そこで A に向かう向きに力を分解すると

$$T + mg\sin 45^\circ = \frac{m}{r} \cdot \frac{rg}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad T = 0,$$

となるので、糸は張力 0 で張る。P が振れ下がるにつれて速さは増し、重力の内向き成分は減るので、それ以降は $T > 0$ である。質点は円に沿って最下点まで進み、この点から測ったエネルギーからも同じ U^2 の値 $\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$ が得られる。

検算

- $r = 1$、$g = 9.81$ として、飛行と円運動の振れをコンピュータで逐次的に数値シミュレーションしたところ、$U^2 \approx 40.430$ が得られた。これは $\frac{1}{2}(4 + 3\sqrt{2})g \approx 40.430$ と一致し、振れの間ずっと張力は非負であった。
- U^2 を求める 2 つの方法（衝突点からと、糸が張る点から）の結果は一致する。
- $e = 1/3$、$c = 9$ ならば、$w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$ が厳密に成り立つ。

よくある間違い

- 上昇した高さを $r - r\cos 45^\circ$ ではなく $r\cos 45^\circ$（つり下げ点からの深さ）としてしまう。
- 反発の法則を速度全体に適用してしまう。影響を受けるのは中心を結ぶ直線方向（ここでは水平方向）の成分だけである。
- e についての三次方程式の負の根を除外し忘れる。

STEP のその先へ

重根の条件は、2 つの曲線（放物運動の放物線と円）が高い次数で接することを意味している。すなわち、両者は出会い、接線を共有し、ここでは曲率（curvature）まで共有する。糸が張るときに張力がちょうど 0 になるのはこのためである。接触の次数（order of contact）や接触円（osculating circle）は、大学 1 年次の曲線論や微分幾何学

（differential geometry）の講義で登場する。衝撃的な拘束と、それがエネルギーを散逸させるのはどのような場合かという問題は、力学の標準的な話題である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方の展開を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。