解答例

STEP II 2025、第 8 問

純粋数学 • 整数の均衡分割

STEP II 2025、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

集合のすべての要素を同じ量 c だけずらすと、その和と平方和は制御された形で変化する。その変化は要素の個数と要素の和だけで決まり、（平方和の場合も）それ以外には依存しない。したがって、同じ大きさの二つの集合の和と平方和がすでに一致していれば、それぞれをずらした複製を作って入れ替えることで、より大きな釣り合った分割（partition）が得られる。小問 (ii) はその背後にある代数であり、小問 (iii) と (iv) はその二通りの応用である。

解答

小問 (i)

$1,2,\ldots,8$ の総和は 36、平方の総和は 204 であるから、それぞれの半分は和が 18、平方和が 102 でなければならない。

8 を B に入れる。B の残りの三つの要素は、和が 10 で、平方和が $102-64=38$ でなければならない。1 から 7 までの相異なる三数で和が 10 となる組は

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

であり、平方和はそれぞれ 54、46、42、38 である。条件を満たすのは $\{2,3,5\}$ のみであるから、

$$A=\{1,4,6,7\},\qquad B=\{2,3,5,8\}.$$

検算：$1+4+6+7=18=2+3+5+8$ かつ $1+16+36+49=102=4+9+25+64$ である。（この探索から、A と B の入れ替えを除けば、四つずつに分ける釣り合った分割はこれ以外にないこともわかる。）

小問 (ii)

各三乗を二項定理（binomial theorem）で展開すると

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

となり、b_k を a_k に置き換えても同様である。したがって

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

である。mc^3 の項は打ち消し合い、二つずつ現れる $\sum a_k^3$ と $\sum b_k^3$ も打ち消し合うからである。仮定より両方の括弧は 0 であるから、すべての実数 c に対して両辺は等しい。これが示すべきことであった。

一つ低い次数で同じ展開を行うと

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

が得られ、一次の場合は $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$ が成り立つことに注意しよう。どちらも $mc + \sum a_k + \sum b_k$ に等しいからである。

小問 (iii)

(i) の釣り合った分割をとり、a_k が $1,4,6,7$ を、b_k が $2,3,5,8$ を動くものとし、$c = 8$ とする。このとき $c + a_k$ は $9,12,14,15$ を、$c + b_k$ は $10,11,13,16$ を動く。

$$A = \{1,4,6,7\} \cup \{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\} \cup \{9,12,14,15\}.$$

とおく。これらは互いに素であり、それぞれ 8 個の要素をもち、合わせると $\{1,2,\ldots,16\}$ になる。$\{1,\ldots,8\}$ と $\{9,\ldots,16\}$ のそれぞれが両者に振り分けられているからである。

> ? **考えてみよう** なぜ A をずらした複製ではなく、B をずらした複製を A に入れるのか？

それがまさに (ii) の形だからである。(ii) の左辺は $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$ であり、これはここでの A の三乗和である。右辺はここでの B の三乗和である。よって $c = 8$ とした (ii) から三乗和が等しいことがわかる。(ii) の最後に挙げた二つの恒等式から和と平方和も等しいことがわかるので、この分割は釣り合っている。

直接計算すると、どちらの半分も和は 68、平方和は 748、三乗和は 9248 である。

小問 (iv)

S の要素を $k = 0, 1, \ldots, 11$ に対して $(n+k)^2$ と書く。k の値からなる任意の集合 K に対して

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\, n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

が成り立つ。したがって、$\{0, 1, \ldots, 11\}$ を、**要素の個数**が等しく、和も平方和も等しい二つの集合に分ければ、対応する平方数の総和はすべての n に対して等しくなる。

与えられた $\{1, \ldots, 11\}$ の分割は、和が等しく（ともに 33）、平方和も等しい（ともに 253）が、二つの部分の要素の個数は 6 と 5 である。小さいほうの部分に $k = 0$ を加えればこれが解消される。要素の個数は一つ増えるが、和にも平方和にも何も加わらないからである。そこで

$$\{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \quad と \quad \{0, 2, 6, 7, 8, 10\},$$

を用いる。これらはいずれも要素の個数が 6、和が 33、平方和が 253 である。したがって

$$C = \{(n+1)^2, (n+3)^2, (n+4)^2, (n+5)^2, (n+9)^2, (n+11)^2\},$$
$$D = \{n^2, (n+2)^2, (n+6)^2, (n+7)^2, (n+8)^2, (n+10)^2\}$$

はどちらも要素の和が $6n^2 + 66n + 253$ となる。$n > 0$ より十二個の平方数は相異なるので、C と D は互いに素であり、その和集合は S である。

検算

- (iv) で $n = 1$ とすると、$C = \{4, 16, 25, 36, 100, 144\}$、$D = \{1, 9, 49, 64, 81, 121\}$ であり、どちらも和は $325 = 6 + 66 + 253$ である。
- (iii) において、和 68 と平方和 748 は、1 から 16 までの総和 136 と平方の総和 1496 のちょうど半分である。三乗和 9248 は $136^2 = 18496$ の半分である。
- $1, \ldots, 8$ から四つを選ぶすべての方法をコンピュータで調べると、(i) の分割は入れ替えを除いて一意であることが確かめられる。また (iv) の構成は n が 499 までの場合について確認した。

よくある間違い

- (iv) で、与えられた A と B をそのまま使ってしまうこと。要素の個数が 6 と 5 で異なるので、n^2 の項が打ち消し合わない。欠けている要素 n^2（すなわち $k = 0$）は B の側に入れなければならない。

- (iii) で、ずらす側を間違えること。$\{9,12,14,15\}$（ずらした a_k）を $\{1,4,6,7\}$ と組にしても和と平方和は釣り合うが、三乗和は $2\left(\sum b_k^3 - \sum a_k^3\right) = 2(672-624) = 96$ だけ異なってしまう。

STEP のその先へ

これはプルーエ–タリー–エスコット問題（Prouhet–Tarry–Escott problem）である。すなわち、整数の集合を二つの部分に分けて、$j = 1,\ldots,k$ に対する j 乗和が一致するようにする問題である。(iii) のずらして入れ替える操作を $c = 16,32,\ldots$ として繰り返すと、$\{0,1,\ldots,2^{k+1}-1\}$ のトゥエ–モース（Thue–Morse）分割が得られ、これは k 乗までのすべての冪和を釣り合わせる。その証明は、(ii) の二項展開を数学的帰納法（induction）で行うものである。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、この種の初等整数論のよい手引きとなる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。