解答例

STEP II 2025、第 7 問

純粋数学 ・ 非線形微分方程式

> **STEP II 2025、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

右辺 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ はちょうど x^2 の t に関する導関数（derivative）であるから、この方程式はただちに積分できて、一階微分方程式（first-order equation）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$ になる。初期条件によって C が定まり、3 つの小問は C の符号として考えられる 3 通り、すなわち零、正、負に対応している。それぞれの一階方程式は変数分離（separation of variables）でき、粒子のふるまいは得られた式から、あるいは $x^2 + C$ の符号から直接読み取ることができる。

解答

一度積分する

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ であるから、方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right), \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$$

を意味する。ここで C は定数である。$t = 0$ において $x = a$ であるから、C は初速度（initial velocity）から a^2 を引いたものである。3 つの小問ではそれぞれ $C = 0$、$C = p^2$、$C = -q^2$ となる。

小問 (i)

このとき $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$ である。$x \neq 0$ である限り速度は正なので、x は $a > 0$ から増加し、決して 0 に達しない。したがって x^2 で割って変数分離してよい：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{1-at}.$$

t が 0 から $\frac{1}{a}$ に向かって増加するにつれ、粒子は正の向きにどんどん速く動き（速度は x^2 である）、$t \to \frac{1}{a}$ のとき $x \to \infty$ となる。粒子は有限時間 $\frac{1}{a}$ で無限遠へ飛び去り、その時刻より先では解は存在しない。

小問 (ii)

今度は $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$ であり、これは常に正なので変数分離できる：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

$\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$ とおく。$a, p > 0$ であるから、これは $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。すると

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

これは $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$ である間成り立つ。粒子はやはり正の向きに速さを増しながら動き、$pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

のとき $x \to \infty$ となる。ここで $\theta > 0$ に対する $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$ を用いた。したがって粒子は有限時間で無限遠へ飛び去り、その時刻は (i) より早い。初速度が大きいのだから、これは予想どおりである。

小問 (iii)

今度は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

である。$x = \pm q$ で速度は零になるので、この 2 つの位置は平衡点（equilibria）である。$x^2 - q^2$ の符号だけで、すでに話の筋はわかる：粒子は $x > q$ のとき右へ、$-q < x < q$ のとき左へ動く。したがって答えは a と q の大小関係によって決まる。

部分分数分解（partial fractions）$\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$ を用いて変数分離すると

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{定数}.$$

指数をとり、$t=0$ で $x=a$ となるよう定数を定めると、次の形が示唆される：

$$\frac{x-q}{x+q}=Ke^{2qt},\qquad K=\frac{a-q}{a+q},\qquad \text{すなわち}\qquad x=q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

どの場合にも符号が正しいことを確かめるため、これを直接検証する。$E=Ke^{2qt}$ とおくと $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=2qE$ である。このとき

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=q\cdot\frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2}=\frac{4q^2E}{(1-E)^2},\qquad x^2-q^2=q^2\,\frac{(1+E)^2-(1-E)^2}{(1-E)^2}=\frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

となり、両者は一致する。$t=0$ では $1+K=\frac{2a}{a+q}$、$1-K=\frac{2q}{a+q}$ であるから $x=q\cdot\frac{a}{q}=a$ となる。よってこの式は、$1-E\neq 0$ であるところではどこでも解である。なお、$a>0$ であるから $-1<K<1$ であることに注意する。

$a>q$ の場合。 このとき $0<K<1$ であり、$E=Ke^{2qt}$ は K から増加する。粒子は正の速度 a^2-q^2 で動き始め、正の向きにどんどん速く動く。分母 $1-E$ は $e^{2qt}=\frac{1}{K}$ のとき 0 になるので、

$$x\to\infty\quad\text{となるのは}\quad t\to\frac{1}{2q}\ln\frac{a+q}{a-q}.$$

(i) や (ii) と同様に、粒子は有限時間で無限遠へ飛び去る。

$a=q$ の場合。 このとき $K=0$ であり、すべての t に対して $x=q=a$ となる。初速度は 0 であり、加速度 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ も零である：粒子は $x=a$ に静止したままである。

$0<a<q$ の場合。 このとき $-1<K<0$ であるから $E<0$ であり、分母 $1-E>1$ は決して零にならない：解はすべての $t\geq 0$ に対して存在する。

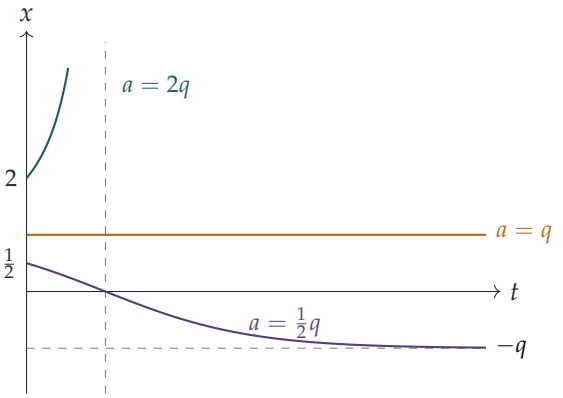
> **考えてみよう** 粒子は原点で止まるのか、それとも通り過ぎるのか。そして最終的にどこへ行き着くのか。

初速度 a^2-q^2 は負であるから、粒子は負の向きに動く。粒子が原点にあるのは $E=-1$ のとき、すなわち $t=\frac{1}{2q}\ln\frac{q+a}{q-a}$ のときであり、そこでの速度は $-q^2\neq 0$ であるから、粒子はそのまま原点を通り過ぎる。$t\to\infty$ のとき $E\to-\infty$ であり、

$$x=q\,\frac{1+E}{1-E}\to -q.$$

となる。全体を通じて $|x|<q$ である（$E<0$ のとき $\frac{1+E}{1-E}\in(-1,1)$ だからである）。したがって速度 x^2-q^2 は負のままであり、粒子は着実に左へ動き、$x=-q$ に決して到達することなく近づいていく。その速さ q^2-x^2 は原点を通過するときに最大値 q^2 をとり、その後は零へと減衰していく。

双曲線関数（hyperbolic functions）を用いると、これらの解は $a > q$ のとき $x = -q\coth\left(qt - \operatorname{arcoth}\frac{a}{q}\right)$、$a < q$ のとき $x = -q\tanh\left(qt - \operatorname{artanh}\frac{a}{q}\right)$ と表される。下図は $q = 1$ として 3 つの場合を描いたものである。



$a = 2q$ と $a = \frac{1}{2}q$ に対して、特別な時刻 $\frac{1}{2q}\ln 3$（破線の縦線）は、それぞれ爆発の時刻と原点を横切る時刻である。

検算

- (ii) で $p \to 0$ とすると、$p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$ かつ $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$ となり、(i) と一致する。$a > q$ の (iii) で $q \to 0$ としても同じことが起こる。
- $x = \frac{a}{1-at}$ を微分すると、$\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$ かつ $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$ である。
- もとの二階方程式を、たとえば $a = 0.5$、$q = 1.4$ として数値的に時間発展させると、$t = 1$ で $x \approx -1.0814$、$t = 3$ で $x \approx -1.3987$ となって式と一致し、また粒子は予測どおり $t \approx 0.2669$ で原点にある。

よくある間違い

- $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ が完全な導関数であることに気づかず、$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ と $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いるような置換を試みること。これでも解けるが、時間がかかる。
- (iii) で対数の中の絶対値（modulus）を落とし、その結果 $a < q$ のときに K の符号を誤ること。
- 平衡の場合 $a = q$ を見落とすこと、あるいは粒子は $-q$ に近づくだけなのに「$-q$ で止まる」と述べること。

STEP のその先へ

ここで見た有限時間爆発（finite-time blow-up）は非線形（nonlinear）方程式の典型的な特徴である：$\dot{x} = x^2$ の右辺はまったく滑らかであるにもかかわらず、その解は限られた時間しか存在しない。これは線形（linear）方程式では決して起こらないことである。小問 (iii) は相直線解析（phase-line analysis）への最初の一歩である：平衡点 $x = q$（不安定（unstable））と $x = -q$（安定（stable））がすべての運動を形づくっており、何かを解く前に $x^2 - q^2$ の符号から運動を予測することができる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、解の存在と一意性（existence and uniqueness）を含め、これら両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。