解答例

STEP II 2025、第 6 問

純粋数学 • 放物線に接する円

STEP II 2025、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで扱う円はすべて中心が y 軸上にあるので、図形全体が対称（symmetric）であり、「2 点で接する」とは、$x_0 \neq 0$ である鏡像の対 $(\pm x_0, y_0)$ で接することを意味する。接すること（tangency）を最も扱いやすく表すには、法線（normal）が一致すると言えばよい。すなわち、接点へ向かう半径が、もう一方の曲線の法線の方向を向いていなければならない。小問 (i) と (ii) からそれぞれ、中心の高さ a を用いた r^2 の式が得られれば、小問 (iii) は、2 つの根（roots）が a_1 と a_2 である a の二次方程式（quadratic equation）の問題になる。

解答

小問 (i)

円が放物線（parabola）と点 $P = (x_0, y_0)$ で接しているとし、$x_0 \neq 0$ とする。（放物線が $x = 0$ と交わるのは原点のみなので、相異なる 2 つの接点がともに軸上にあることはない。また対称性より、(x_0, y_0) が接点ならば $(-x_0, y_0)$ も接点である。）

P における円の法線は半径の方向 $(x_0,\, y_0 - a)$ を向く。放物線を $2ky - x^2 = 0$ と書くと、その法線は勾配ベクトル $(-2x_0,\, 2k)$ の方向を向く。接するとは、これらが平行であることを意味する：

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

$x_0 \neq 0$ であるから、$y_0 = a - k$ を得る。すると P は放物線上にあるので $x_0^2 = 2ky_0 =$

$2k(a-k)$ であり、P は円上にあるので

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = k(2a-k)$$

となり、示すべき式が得られた。

逆（converse）に、$a > k > 0$ かつ $r^2 = k(2a-k)$ とする。$y_0 = a - k > 0$、$x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$ とおく。作り方から $(\pm x_0, y_0)$ はともに放物線上にあり、また $x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = r^2$ であるから円上にもある。これらの各点において法線 $(\pm x_0, -k)$ と $(\mp 2x_0, 2k)$ は平行であるから、2 つの曲線はそこで接線（tangent）を共有する。$x_0 \neq 0$ であるから、円は放物線と相異なる 2 点で接する。

（確認として、$x^2 = 2ky$ を円の方程式に代入すると $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$、すなわち $(y - (a-k))^2 = 0$ となる。これは重根（repeated root）であり、接することの代数的な目印である。）

小問 (ii)

直線 $y = c + x$、すなわち $x - y + c = 0$ が円に接するのは、中心 $(0, a)$ からこの直線までの距離が r に等しいとき、かつそのときに限る：

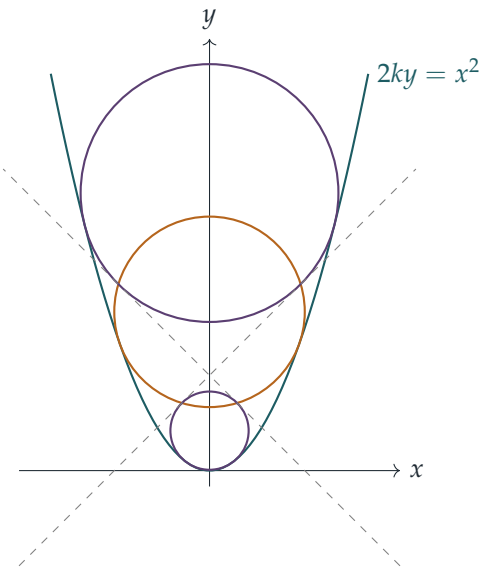
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

直線 $y = c - x$ は y 軸に関する鏡像であるから、同じ条件を与える。

接点は $(0, a)$ から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）である。半径は直線に垂直なので方向 $(1, -1)$ を向く。$(0, a)$ から $t(1, -1)$ だけ移動して $y = c + x$ 上に乗るとすると $a - t = c + t$ となるので、$t = \frac{a-c}{2}$ である。$y = c + x$ との接点は

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

であり、対称性より $y = c - x$ との接点は $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$ である。



$k = 1$、$c = 3$ の場合：放物線、それに接する 2 つの円 C_1、C_2（紫）と直線 $y = 3 \pm x$（破線）、および小問 $(iii)(b)$ の円（琥珀色）。

小問 (iii)(a)

各円は放物線と 2 点で接するので、小問 (i) より $r_i^2 = k(2a_i - k)$ である。また各円は直線 $y = c \pm x$ に接するので、小問 (ii) より $r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$ である。両者を等しいとおくと

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

よって a_1 と a_2 はともに二次方程式 $a^2 - 2(c + 2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$ を満たす。$a_1 \neq a_2$ であるから、これらはこの方程式の 2 つの根であり、したがって

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

すると

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

となり、(a) が示された。

小問 (iii)(b)

小問 (ii) より、C_i 上の接点は $(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2})$ である。$u_i = a_i - c$ とおくと見通しがよくなり、接点は $(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2})$ となる。

考えてみよう 4 点を通る 1 つの円が必要だが、未知数は d と p の 2 つしかない。a_1 と a_2 を具体的に求めずに、これらをどう決定すればよいだろうか？

4 点は 2 組の鏡像の対であり、中心が y 軸上にある円はどれも対称であるから、$u = u_1$ と $u = u_2$ に対して円が $\left(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2}\right)$ を通るようにすれば十分である。この条件は

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c-d)\,u + 2(c-d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

である。一方、(a) の二次方程式に $a = u + c$ を代入すると

$$u^2 - 4k\,u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

となり、その根はちょうど u_1 と u_2 であって、$a_1 \neq a_2$ よりこれらは相異なる。円が 4 点すべてを通るのは、u_1 と u_2 がともに $(*)$ の根であるとき、かつそのときに限る。相異なる同じ 2 つの根をもつ最高次係数 1 の二次式（monic quadratic）は一致するので、$(**)$ と係数を比較する（compare coefficients）：

$$2(c-d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

さらに $2(c-d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$ であるから

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

小問 (iii)(c)

小問 (i) の逆を用いる。$d = c + 2k$ のとき

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

であるから、この円は a の代わりに d とした $r^2 = k(2a - k)$ の形にちょうどなっている。あとは $d > k$ を確かめればよい。

考えてみよう (a) でも (b) でも不等式など一切出てこなかったのに、$d > k$ のような不等式はどこから来るのだろうか？

それは、C_1 と C_2 が実際に放物線と 2 点で接しているという事実から来る。小問 (i) では、2 点で接することから、接点は $y_0 = a - k$ かつ（$x_0 \neq 0$ より）$x_0^2 = 2k(a-k) > 0$ を満たさなければならなかった。よって $a_1 > k$ かつ $a_2 > k$ である。これらを加えて (a) を用いると

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

したがって $d > k > 0$ かつ $p^2 = k(2d - k)$ であり、小問 (i) の後半より、円 $x^2 + (y - d)^2 = p^2$ は放物線 $2ky = x^2$ と 2 点、すなわち $(\pm\sqrt{2k(c+k)},\, c + k)$ で接する。

検算

$k = 1$、$c = 3$ とする（上の図）。(a) の二次方程式は $a^2 - 10a + 11 = 0$ となるので、$a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$ および 1.258 である。その和は $10 = 2c + 4k$ であり、平方和は $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$ である。小問 (b) より $d = 5$、$p^2 = 9$ となる。円 $x^2 + (y-5)^2 = 9$ と $2y = x^2$ の交点は $2y + (y-5)^2 = 9$、すなわち $(y-4)^2 = 0$ を満たす。これは $y = 4$ における重根なので、(c) の予想どおり $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$ で接する。4 つの接点のそれぞれ、たとえば $(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2})$ は、$(0,5)$ から距離 3 のところにある。また、条件を満たす無作為な k と c の数百通りの組について、すべての結果をコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- (i) で、接点が $x_0 \neq 0$ を満たすことを忘れる。これこそが x_0 で割ることを可能にし、また $a > k$ を導くものでもある。
- (iii)(a) で、$r^2 = k(2a - k)$ だけ、あるいは $r^2 = \frac{1}{2}(a-c)^2$ だけを使う。a の二次方程式は、両方を同時に満たす必要があることから生じる。
- (iii)(c) で、$p^2 = k(2d - k)$ は確かめたが $d > k$ を確かめない。これがないと、その「円」は原点でしか接しないか、まったく接しないかもしれない。

STEP のその先へ

小問 (i) より、中心が y 軸上にあり放物線と 2 回接する円は $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y-k) = 0$ である。これはパラメータ a について 1 次の方程式である。このような族は円束（pencil、あるいは共軸円系（coaxal system））と呼ばれ、C_1、C_2、および (b) の円はすべてこれに属する。法線を一致させることは、曲線どうしの**接触**（contact）という考え方への第一歩である。曲線と 2 次まで接触する円はその曲線の曲率円（circle of curvature）であり、曲線の微分幾何学（differential geometry）の最初の講義で出会うものである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨に沿った STEP 風の座標幾何の問題がさらに多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。