解答例

# STEP II 2025、第 5 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 2025、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

ここで扱う積分はどれも 0 から $\infty$ までの積分である。$x = u^{-m}$ の形の置換（substitution）は $[0,\infty)$ を自分自身の上に写し、その両端を入れ替える。$\mathrm{d}x$ から出てくるマイナス符号が積分の上端と下端の入れ替わりを打ち消すので、再び $[0,\infty)$ 上の積分にたどり着く。新しい被積分関数（integrand）がもとの被積分関数の符号を反転したものであれば、その積分は自分自身の符号を反転したものに等しくなり、したがって零である。新しい被積分関数が同じ形をした別の被積分関数の定数倍であれば、どちらの積分も計算することなく、二つの積分の間の関係式が得られる。小問 (iii) と (iv) では指数（exponent）を一般のままにしておき、$u$ のべきが打ち消し合うようにそれを選ぶ。

## 解答

以下を通して、$m > 0$ として $x = u^{-m}$ とおくと、$u \to \infty$ のとき $x \to 0$、$u \to 0$ のとき $x \to \infty$ となるので、

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\,(-mu^{-m-1})\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

これを $m = 1$ と $m = 2$ で用い、その後一般の $m$ で用いる。

**小問 (i)**

求める積分を $I$ とし、$x = u^{-1}$ とおく。積分の上端と下端をもとの順に直すと $\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$ となる。$u > 0$ に対して

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

であり、

$$\sqrt{x}-1 = \frac{1}{\sqrt{u}}-1 = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}}\cdot\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u = -I. \end{aligned}$$

積分変数の名前は関係ないので、最後の積分は再び $I$ である。よって $2I = 0$ となり、求めるとおり $I = 0$ が得られる。

これは被積分関数が零であるということではないことに注意しよう。被積分関数は $(0,1)$ 上で負、$(1,\infty)$ 上で正であり、置換によって二つの面積がちょうど対応づけられているのである。

**小問 (ii)**

今度は $x = u^{-2}$ とおく。積分の上端と下端を並べ直すと $\mathrm{d}x \to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$ となる。$u > 0$ に対して

$$x^3+1 = u^{-6}+1 = \frac{1+u^6}{u^6}, \qquad \sqrt{x^3+1} = \frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

したがって

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}}\cdot\frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

であり、$u$ を $x$ と書き直せば求める結果となる。

**小問 (iii)**

小問 (i) は $s = 1, p = 3, r = \frac{1}{2}$ の場合であるから、その方法を文字のまま繰り返す。求める積分を $J$ とし、$x = u^{-1}$ とおく。

$$x^s(x^p+1) = u^{-s}\cdot\frac{1+u^p}{u^p} = \frac{u^p+1}{u^{s+p}}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{x^s(x^p+1)} = u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

であり、また $x^r - 1 = (1-u^r)/u^r$ である。よって

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

これを、次のように書いた $J$ そのものと比べる。

$$J = \int_0^\infty \frac{(u^r - 1)\, u^{-s/2}}{\sqrt{u^p + 1}}\, \mathrm{d}u.$$

**考えてみよう** 何かを計算するのではなく、$u$ のべきを一致させるだけで十分なのはなぜか？

$u$ の二つのべきが一致すれば、置換によって $J$ は $-J$ に変わり、小問 (i) とまったく同様に $J = 0$ となる。よって

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

であればよい。この $r$ の値に対して $J = -J$ が得られるので、$J = 0$ である。（問題文には、$p$ と $s$ は積分が収束（converge）するようなものであると書かれており、$J = -J \Rightarrow J = 0$ という議論に必要なのはそれだけである。）検算として、$s = 1$ と $p = 3$ とすると $r = 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ となり、これは小問 (i) である。

**小問 (iv)**

小問 (ii) は $k = 2, p = 3, q = 6$ の場合であり、それは $x = u^{-2}$ から得られた。そこで $m > 0$ として $x = u^{-m}$ を試す。このとき $\mathrm{d}x \to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$ である。$x^p + 1 = (1 + u^{mp})/u^{mp}$ であるから、

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p + 1}} = m \int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\, u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp} + 1}}\, \mathrm{d}u.$$

余分な $u$ のべきは

$$\frac{mp}{2} = m + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 2 + \frac{2}{m},$$

のときに消え、このとき右辺は $q = mp = 2m + 2$ として $m \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q + 1}}$ となる。

ここで $m = k$ とする。任意の $k > 0$ に対して、

$$p = 2 + \frac{2}{k}, \qquad q = 2k + 2$$

と選べば

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p + 1}} = k \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q + 1}}.$$

が成り立つ。$k > 0$ であるから、どちらの指数も 2 より大きい。$x$ が大きいとき被積分関数は $x^{-p/2}$ のようにふるまうので、これはまさにこれらの積分が収束するための条件である。よって、得られた関係式に現れる積分は存在する。$k = 2$ とすると小問 (ii) の $p = 3, q = 6$ が再び得られ、$k = 1$ とすると自明な場合 $p = q = 4$ が得られる。

## 検算

- 数値的には $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} \approx 2.8044$、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}} \approx 1.4022$ であり、小問 (ii) のとおりちょうど半分になっている。
- 小問 (i) の積分は、負の寄与の大部分が $x = 0$ の近くから来て、正の寄与は $(1, \infty)$ 上に薄く広がっているにもかかわらず、機械精度の範囲で零になる。
- 条件を満たす $p$ と $s$ を無作為に選んでコンピュータで確かめると、$r = s + \frac{p}{2} - 2$ のとき小問 (iii) の積分は零になった。$r$ を 0.3 だけ変えると、明らかに零でない値が得られた。
- $k = \frac{1}{2}$（このとき $p = 6, q = 3$）に対しては、小問 (iv) の関係式は小問 (ii) を逆から読んだものになっており、そうなるべきとおりである。

## よくある間違い

- 置換によって積分の上端と下端が入れ替わることを忘れる。$\mathrm{d}x$ から出るマイナス符号と、逆転した積分区間とが打ち消し合うのであり、どちらか一方を落とすと小問 (i) で符号を誤る。
- 小問 (iii) で一般のべきを扱うときに、$u^{-s/2}$ ではなく $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$ と書いてしまう。
- 小問 (iv) で、すべての $k > 0$ の関数として $p$ と $q$ を与えるのではなく、特定の $k$ に対する組 $(p, q)$ を一つ見つけるだけで終わってしまう。

## STEP のその先へ

これらの積分はすべて閉じた形（closed form）で計算できる。$t = x^p/(1+x^p)$ と置換すると、$\int_0^\infty (1+x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ は $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ に変わる。ここで B はオイラー（Euler）のベータ関数（Beta function）である。これをガンマ関数（Gamma function）と組み合わせると、小問 (iv) の比が具体的に求められる。積分をその符号を反転したものに写す $x \mapsto 1/x$ という対称性を使う技法は、解析学（analysis）や周回積分（contour integration）において何度も現れる。ここでは省略してよいとされた収束の問題も含め、広義積分（improper integral）の丁寧な扱いについては Abbott の *Understanding Analysis* を参照するとよい。STEP 風の置換の技法をさらに多く知りたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を見るとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。