解答例

STEP II 2025、第 4 問

純粋数学 ・ 床関数の恒等式

> **STEP II 2025、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの事実に基づいている。$\lfloor x \rfloor = m$ とは、m が $m \le x < m+1$ を満たす整数であることにほかならない。小問 (i) は、整数のずらしは床関数（floor function）の外へそのまま出せることを述べている。これを用いると、f_n は周期 $\frac{1}{n}$ の周期関数（periodic function）であることがわかるので、短い一つの区間上で考えれば十分であり、そこでは各項を容易に求められる。小問 (iii) は姿を変えた $n = 2$ の場合であり、これによって無限和が打ち消し合って簡単になる（telescope）。

解答

小問 (i)

$m = \lfloor x \rfloor$ とおく。すると m は整数で $m \le x < m+1$ である。整数 n を加えると

$$m + n \le x + n < (m + n) + 1.$$

$m + n$ は整数であるから、$x + n$ を超えない最大の整数である。よって $\lfloor x + n \rfloor = m + n = \lfloor x \rfloor + n$ となり、示された。

小問 (ii)(a)

$\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor - \lfloor nx \rfloor$ と書く。x を $x + \frac{1}{n}$ に置き換えると、和の各項は一つずつずれる：

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \tfrac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

和の最後の項は $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$ であり、また $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$ である。いずれも $n=1$ とした小問 (i) による。よって

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

小問 (ii)(b)

$0 \le t < \frac{1}{n}$ とする。$0 \le k \le n-1$ に対して

$$0 \le t+\tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

であるから $\lfloor t+\frac{k}{n}\rfloor = 0$ である。また $0 \le nt < 1$ より $\lfloor nt\rfloor = 0$ である。すべての項が 0 であるから、$\mathrm{f}_n(t) = 0$ となる。

小問 (ii)(c)

考えてみよう (a) で許されるのは $\frac{1}{n}$ だけ上へ進むことだけである。$[0, \frac{1}{n})$ より下にある x にはどうやってたどり着けばよいか。

点 $x-\frac{1}{n}$ において (a) を用いると $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n(x-\frac{1}{n})$ が得られるので、上だけでなく下へも進める。数学的帰納法（induction）により、正負を問わずすべての整数 m に対して $\mathrm{f}_n(x+\frac{m}{n}) = \mathrm{f}_n(x)$ が成り立つ。

いま任意の実数 x をとり、$m = \lfloor nx\rfloor$ とおくと、$m \le nx < m+1$ である。$t = x - \frac{m}{n}$ とおく。$n > 0$ で割ると $0 \le t < \frac{1}{n}$ を得る。したがって (b) により

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

である。よってすべての x に対して $\mathrm{f}_n(x) = 0$ であり、これは恒等式（identity）

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

にほかならない。

小問 (iii)(a)

(ii)(c) で $n=2$ とし、$\frac{x}{2}$ において値をとると

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

となり、整理すると $\lfloor \frac{x}{2}\rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2}\rfloor = \lfloor x\rfloor$ を得る。

小問 (iii)(b)

考えてみよう $+1$ が一つだけ現れる (iii)(a) は、項 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ を扱うのにどう役立つか。

分子と分母を 2^k で割る。$y = x/2^k$ とおくと、x の代わりに y とした (iii)(a) を用いて

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

となる。よって $k = 0, 1, \ldots, K$ の項の和は打ち消し合って

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

となる。$K \to \infty$ のとき $x/2^{K+1} \to 0$ であるが、答えは 0 にどちら側から近づくかによって変わる。

- $x \geq 0$ の場合：$2^{K+1} > x$ となれば $0 \leq x/2^{K+1} < 1$ であるから、最後の床関数の値は 0 であり、それ以降 $S_K = \lfloor x \rfloor$ である。
- $x < 0$ の場合：$2^{K+1} \geq -x$ となれば $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$ であるから、最後の床関数の値は -1 であり、それ以降 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$ である。

いずれの場合も 0 でない項は有限個しかないので、無限和は

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

である。x が非負整数ならば、和は単に x である。

検算

$x = 7$ で試す。各項は $\lfloor 4 \rfloor = 4$、$\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$、$\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$、$\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$ であり、以降の項はすべて 0 である。合計は $7 = \lfloor 7 \rfloor$ となる。$x = -\frac{5}{2}$ で試すと、各項は $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$、$\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$、$\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0$、…となる。和は $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$ であり、負の場合が確かに異なることが確認できる。(ii) については、$n = 3$、$x = 1.5$ とすると $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$ となる。2 万個の無作為な有理数 x と $1 \leq n \leq 30$ の値についてコンピュータで確かめたところ、問題中のすべての恒等式と、打ち消し合った後の部分和が正しいことが確認された。

よくある間違い

- (ii)(c) で (a) を上へ進むためだけに使うこと。これでは $x \geq 0$ は扱えるが、負の x については何も言えない。
- (iii)(b) で、すべての x に対して $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$ と思い込むこと。負の x に対しては 0 ではなく -1 に落ち着く。
- a も b も整数でないのに $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$ と書くこと。小問 (i) は、まさにこれが許される場合を述べている。

STEP のその先へ

(ii)(c) の恒等式はエルミート（Hermite）の恒等式である。これは初等整数論（elementary number theory）の中心をなす床関数に関する一群の結果の一つであり、たとえば $N!$ を割り切る素数 p の最高べきの指数を与えるルジャンドル（Legendre）の公式 $\sum_{k \geq 1} \lfloor N/p^k \rfloor$ もその仲間である。(iii)(b) の和もあるものを数えている。正の整数 x に対して、第 k 項は 1 から x までの整数のうち 2^k で割り切れるが 2^{k+1} では割り切れないものの個数であり、どの整数もちょうど一度ずつ数えられる。これらの考え方が実際に働く様子を見るには、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。