解答例

STEP II 2025、第 3 問

純粋数学 ・ 累乗の比較

> **STEP II 2025、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

a^b と b^a（$a, b > 0$）を比べる問題はどれも、対数（logarithm）をとって ab で割れば、$\frac{\ln a}{a}$ と $\frac{\ln b}{b}$ の比較に帰着する。したがって、すべては関数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフに行き着く。このグラフは $x = \mathrm{e}$ でただ一つの山頂まで増加し、その後は減少する。e の同じ側にある二つの数は簡単に比較できるが、反対側にある二つの数を比べるには、$f(2) = f(4)$ という見事な一致のような「踏み石」が必要になる。

解答

以下、$x > 0$ に対して $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ とおく。ln は増加関数であるから、正の a, b に対して

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

が成り立つ。ここで $ab > 0$ で割った。この言い換えをすべての小問で用いる。

小問 (i)

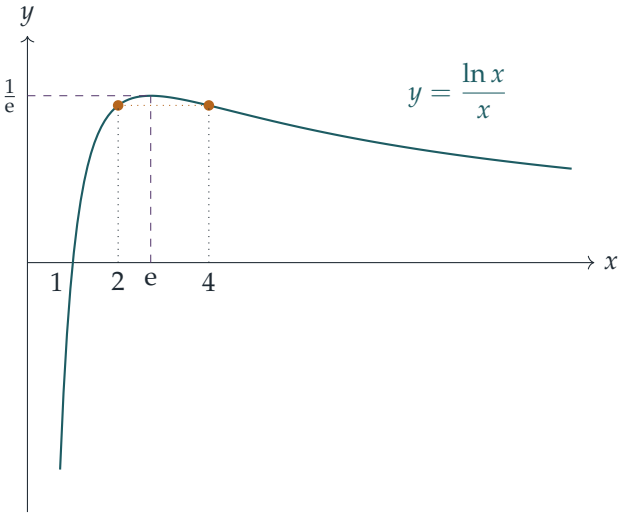
商の微分法（quotient rule）により

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

であり、これは $0 < x < \mathrm{e}$ で正、$x > \mathrm{e}$ で負である。よって f は $(0, \mathrm{e}]$ で狭義単調増加（strictly increasing）、$[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、最大値は $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$ である。

その他の特徴：

- $f(1) = 0$ である。$(0,1)$ で $f < 0$、$(1,\infty)$ で $f > 0$ である。
- $x \to 0^+$ のとき、$\ln x \to -\infty$ かつ $1/x \to +\infty$ であるから $f(x) \to -\infty$ となる。すなわち y 軸は漸近線（asymptote）である。
- $x \to \infty$ のとき、$\ln x$ は x よりゆっくり増加するので $f(x) \to 0^+$ となる。すなわち x 軸は漸近線である。
- もう一度微分すると $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$ となるので、$x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ に変曲点（point of inflection）がある。



琥珀色の点は $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$ を表しており、これを小問 (iii) で用いる。

小問 (ii)

(a) 上の言い換えにより、$3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$ である。3 と π はどちらも e より大きく、f は $[\mathrm{e},\infty)$ で狭義単調減少である。$3 < \pi$ であるから $f(3) > f(\pi)$ となり、したがって $3^\pi > \pi^3$ である。

(b) ここでの不等式は $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{9/4}$ であり、これは $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$ と同値である。今度は二つの数がともに e より小さい。実際 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$ であり、$\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ は $5 < \frac{81}{16}$ からわかる。$(0,\mathrm{e}]$ で f は狭義単調増加であるから、入力が大きいほど値も大きい。よって $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$ となり、示すべきことが得られた。

小問 (iii)

$a = x$、$b = x+2$ とすると、言い換えにより

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

$1 < x < 2$ のとき $x \in (1,2)$、$x+2 \in (3,4)$ であり、二つは e の反対側にあるので、踏み石が必要である。

> **考えてみよう** e の左側の点での f の値と、右側の点での f の値を、どうすれば比べられるだろうか？

二つの琥珀色の点を通る水平線を利用する。$1 < x < 2 < \mathrm{e}$ であり、そこで f は増加するから $f(x) < f(2)$ である。$\mathrm{e} < x+2 < 4$ であり、そこで f は減少するから $f(x+2) > f(4)$ である。さらに $f(2) = f(4)$ であるから

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

よって $f(x) < f(x+2)$ であり、$(x+2)^x$ のほうが大きい。すなわち、$(1,2)$ のすべての x に対して $(x+2)^x > x^{x+2}$ である。

小問 (iv)

最初の不等式の両辺を、3 のべきと $2\sqrt{2}$ のべきに書き直す：

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{9} = \left(\sqrt{2}^{3}\right)^{3} = \left(2\sqrt{2}\right)^{3}.$$

したがって二つの不等式は左辺どうしも右辺どうしも等しく、同じ主張であるから同値である。

言い換えにより、$3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$ である。$\mathrm{e}^2 < 8$ から（正の平方根をとって）$\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ が得られ、$8 < 9$ から $2\sqrt{2} < 3$ である。よって

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

であり、f は $[\mathrm{e}, \infty)$ で狭義単調減少であるから $f(2\sqrt{2}) > f(3)$ となる。したがって $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$、すなわち

$$\sqrt{2}^{9} > 9^{\sqrt{2}} : \quad \text{大きいのは} \sqrt{2}^{9}.$$

小問 (v)

$a = \sqrt[3]{3}$ とおく。8^a と a^8、すなわち $f(8)$ と $f(a)$ を比べたい。$a < 2 < \mathrm{e} < 8$ であるから、二つの入力はやはり山頂の反対側にあり、しかも値が近い（$f(a) \approx 0.254$、$f(8) \approx 0.260$）ことがわかるので、小問 (iii) の工夫より精密な方法が必要である。

考えてみよう $f(a)$ と $f(8)$ を、もっと簡単な点での f の値を使って表せないだろうか？

役に立つ恒等式は $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$ である。これにより

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4}f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}f(2).$$

小問 (iv) より $f(3) < f(2\sqrt{2})$ である。$a > 0$ で割ると

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

最後に、両辺を 6 乗すると $9 > 8$ となるので、$a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$ である。よって $2\sqrt{2}\,a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$ であり、$f(2) > 0$ であるから

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

したがって $f(8) > f(a)$ であり、言い換えにより $8^a > a^8$ である。すなわち大きいのは $8^{\sqrt[3]{3}}$ である。

検算

数値的には、$3^\pi \approx 31.54$ に対して $\pi^3 \approx 31.01$、$\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ に対して $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$、$x = 1.5$ のとき $1.5^{3.5} \approx 4.13$ に対して $3.5^{1.5} \approx 6.55$、$9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ に対して $\sqrt{2}^{9} \approx 22.63$、$8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ に対して $\sqrt[3]{3}^{8} \approx 18.72$ である。いずれも上の結論と一致する。(ii) と (iv) では差が小さく、だからこそ大まかな見積もりではなくグラフによる議論が必要なのである。小問 (iii) について、$(1,2)$ 内の 10^5 個の無作為な点でコンピュータによる確認を行ったところ、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- e の反対側にある二点での f の値を、f が単調であるかのように比べてしまう。(iii) と (v) では踏み石が不可欠である。
- $b\ln a > a\ln b$ を ab で割っても不等号の向きが変わらないのは、$ab > 0$ だからこそであることを忘れる。
- (ii)(b) で、$\frac{9}{4}$ と $\sqrt{5}$ のどちらが大きいか、また両方が e より小さいことを正当化しない。

STEP のその先へ

$a \neq b$ のときの方程式 $a^b = b^a$ はちょうど $f(a) = f(b)$ のことであり、$0 < c < 1/\mathrm{e}$ を満たす水平線 $y = c$ はどれもグラフと 2 回交わる。$a < b$ となる解は、$t > 0$ を用いて $a = (1 + \frac{1}{t})^t$、$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$ とパラメータ表示（parametrise）できる。$t = 1$ とすると $(2, 4)$ が得られ、これはこのような正の整数の組としてただ一つのものである。$t \to \infty$ のとき両者はともに e に収束する。これは大学 1 年の解析学における標準的な極限の一つである。このような議論の背後にある単調性と平均値の定理（mean value theorem）の厳密な扱いについては、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。