解答例

STEP II 2025、第 2 問

純粋数学 • 絶対値を含む複素数の方程式

> **STEP II 2025、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

$z = x + \mathrm{i}y$ とおき、方程式を実部（real part）と虚部（imaginary part）に分ける。絶対値（modulus）は常に実数であるから虚部には何も寄与せず、その結果 z^2（または z^3）の虚部が因数分解（factorisation）できる。この因数分解から、解が複素数平面（Argand diagram）上のどの直線の上になければならないかがわかり、それぞれの直線の上では問題は 1 変数の実数の方程式に帰着する。

解答

小問 (i)

(a) x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とおく。このとき $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$ である。一方、$|z + b|$ は実数であり、a も実数である。$z^2 + |z + b| = a$ の虚部を比較すると

$$2xy = 0,$$

を得る。よって $x = 0$（このとき z は純虚数（purely imaginary））または $y = 0$（このとき z は実数）である。これが示すべきことであった。

(b) y を実数として $z = \mathrm{i}y$ と仮定する。このとき $z^2 = -y^2$、$|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$ であるから、

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

が成り立たなければならない。両辺はともに正であるから、これは両辺を 2 乗した方程式

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

と同値（equivalent）である。左辺はすべての実数 y に対して 6 以上であるから、解は存在しない。すなわち、この方程式は純虚数の解をもたない。

(c) $z = x$ が実数であると仮定すると、$x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$ が成り立たなければならない。$x + \frac{7}{2}$ の符号で場合分けする。

- $x \geq -\frac{7}{2}$ のとき：$x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$、すなわち $x^2 + x + 1 = 0$ であり、その判別式（discriminant）は $1 - 4 = -3 < 0$ である。実数解はない。
- $x < -\frac{7}{2}$ のとき：$x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$、すなわち $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$ である。解 3 と -2 はいずれも条件 $x < -\frac{7}{2}$ を満たさないので、どちらも解ではない。

したがって、実数の解は存在しない。

> **考えてみよう** なぜ $x^2 - x - 6 = 0$ を解いただけで終わりにしてはいけないのだろうか？

それぞれの場合の式は、もとの方程式をその場合の x の範囲においてのみ表している。場合ごとの方程式の解のうちその範囲の外にあるものは、別の方程式（絶対値の中の符号を誤ったもの）の解であるから、捨てなければならない。

(d) ここでは $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ であり、特に $b > 0$ である。

純虚数の解。 $z = \mathrm{i}y$ とおき、$Y = y^2 \geq 0$ と書く。方程式は $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$、すなわち

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

となる。$Y \geq 0$ のとき右辺は正であるから、両辺を 2 乗しても同値な方程式が得られる：

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

$b > \frac{1}{2}$ より $b^2 - \frac{1}{4} > 0$ であるから、$Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$ は確かに正の値であり、

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

は純虚数の解である。

実数の解。 $z = x$ とおき、$|x + b| = x + b$ となる $x \geq -b$ の範囲で解を探す。方程式は

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

となり、その判別式は $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$ である。$b < \frac{3}{4}$ よりこれは正である。大きい方の解

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

をとる。これが範囲 $x \geq -b$ にあることを確かめなければならない。$x_+ \geq -b$ は $\sqrt{3-4b} \geq 1-2b$ と同値であり、$b > \frac{1}{2}$ より右辺は負、左辺は正であるから、これは確かに成り立つ。よって x_+ は実数の解である。

したがって、$\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ のとき、この方程式は少なくとも 1 つの純虚数の解と少なくとも 1 つの実数の解をもつ。これが示すべきことであった。(b に関するそれぞれの条件はちょうど一度ずつ使われている。$b > \frac{1}{2}$ は純虚数の解と $x_+ \geq -b$ のために、$b < \frac{3}{4}$ は実数の場合の判別式のために用いた。)

小問 (ii)

$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。このとき

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

である。後者は実数であるから、方程式の虚部は

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

となり、$y = 0$ または $y^2 = 3x^2$ を得る。(幾何学的には、z は実軸上か、直線 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ のいずれかの上にある。これらはちょうど偏角が $\frac{\pi}{3}$ の倍数となる方向であり、z^3 を実数にする方向にほかならない。)

$y = 0$ の場合。 実部から $x^3 + (x+2)^2 = 4$、すなわち

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

を得る。2 次式の判別式は $1 - 16 < 0$ であるから、解は $x = 0$ のみであり、$z = 0$ となる。

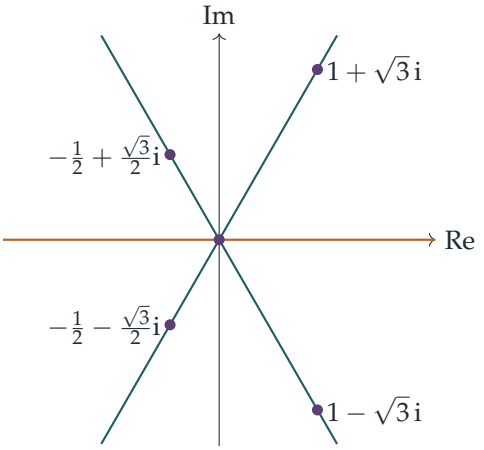
$y^2 = 3x^2$ の場合。 実部の式 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$ に $y^2 = 3x^2$ を代入すると：

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$ のとき $y = 0$ となる。これは再び $z = 0$ である。
- $x = 1$ のとき $y^2 = 3$ であるから、$z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ である。
- $x = -\frac{1}{2}$ のとき $y^2 = \frac{3}{4}$ であるから、$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$ である。

どの段階も同値変形であった(代入と因数分解しか行っていない)から、これらはすべて確かに解である。したがって、この方程式の解はちょうど次の 5 つである：

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



解は、虚部の条件によって許される 3 本の直線 $y=0$ および $y=\pm\sqrt{3}\,x$ の上にある。

検算

- 極形式（polar form）で表すと $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ であるから $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$ であり、また $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$ である。確かに $-8+12=4$ となる。
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ は 1 の 3 乗根（cube root of unity）であるから $z^3=1$ であり、また $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$ である。確かに $1+3=4$ となる。
- (d) で $b=\frac{5}{8}$ を試すと、$Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$ であり、$-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$ となる。実数の解は $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$ であり、必要どおり $-\frac{5}{8}$ より大きい。
- 小問 (ii) の方程式の解を領域 $|x|,|y|\le 3$ 全体でコンピュータにより探索したところ、上の 5 つの解がちょうど見つかった。

よくある間違い

- $|z+b|$ が虚部をもつかのように扱ったり、$|z+2|^2$ を $(z+2)^2$ として展開したりすること。絶対値の 2 乗は $(x+2)^2+y^2$ であり、実数である。
- (c) や (d) のように、場合ごとの方程式の解が、その場合の適用される範囲にあるかどうかの確認を忘れること。
- (ii) で虚部を y で割ってしまい、実数の解 $z=0$ を見落とすこと。

STEP のその先へ

z と $|z|$（あるいは $\bar{z}$）が混在する方程式は z の多項式ではないので、代数学の基本定理（fundamental theorem of algebra）は解の個数について何も教えてくれない。実際ここでは「3 次方程式」が 5 つの解をもっている。このような方程式は、2 つの実数の未知数に関する 2 つの実数の方程式の組として考えるのが正しい。この見方には大学 1 年次の複素解析（complex analysis）で再び出会うことになる。そこでは、関数が複素数の意味で微分可能であるのは、それが $\bar{z}$ によらず z のみに依存するときに限ることを学ぶ（コーシー・リーマンの方程式（Cauchy–Riemann equations））。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、この幾何学的な描像を生き生きと描き出している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。