解答例

STEP II 2025、第 12 問

確率・統計 ・ ポアソン分布

> **STEP II 2025、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

ポアソン分布（Poisson distribution）では、隣り合う確率の比が $p_r/p_{r-1} = \lambda/r$ という簡単な形になる。したがって、どの差分（difference）d_r も、既知の確率と r の簡単な有理式の積として書ける。d_r の符号から p_r がどこで増加しどこで減少するかがわかる。さらに一段進めると、**二階差分**（second difference）$d_{r+1} - d_r$ の符号から d_r がどこで増加しどこで減少するかがわかり、その符号は r の 2 次式で決まる。一見扱いにくそうな数 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ は、その 2 次式の根（に 1 を加えたもの）にすぎない。

解答

以下では常に $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$ である。よって $r \geq 1$ に対して

$$p_r = \frac{\lambda}{r}\, p_{r-1}, \qquad p_{r-1} = \frac{r}{\lambda}\, p_r,$$

が成り立ち、どの p_r も真に正である。

小問 (i)

$r \geq 1$ に対して

$$d_r = p_r - p_{r-1} = p_{r-1}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) = \frac{p_{r-1}}{r}\,(\lambda - r).$$

$p_{r-1}/r > 0$ であるから、d_r の符号は $\lambda - r$ の符号と一致する。また λ は整数でないので、d_r が 0 になることはない。λ より小さい最大の整数を $m = \lfloor \lambda \rfloor$ とおくと、$\lambda - 1 < m < \lambda$ である（$\lambda \notin \mathbb{Z}$ なので、どちらの不等式も等号を含まない）。このとき

- $1 \leq r \leq m$ では $r < \lambda$ なので $d_r > 0$ であり、$p_0 < p_1 < \cdots < p_m$ となる。

▶ $r \geq m+1$ では $r > \lambda$ なので $d_r < 0$ であり、$p_m > p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots$ となる。

（$\lambda < 1$ のときは $m = 0$ であり、一つ目の列は空である。）したがって、$r \neq m$ であるすべての r について $p_r < p_m$ が成り立つ。すなわち m は最も起こりやすい値としてただ一つに定まり、$\lambda - 1 < m < \lambda$ である。

小問 (ii)

次に、d_r 自体がどう変化するかを調べる。$r \geq 1$ に対して $e_r = d_{r+1} - d_r = p_{r+1} - 2p_r + p_{r-1}$ とおく。すべてを p_r で表すと

$$e_r = p_r\left(\frac{\lambda}{r+1} - 2 + \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{p_r}{\lambda(r+1)}\Big(\lambda^2 - 2\lambda(r+1) + r(r+1)\Big).$$

前の係数は正であるから、e_r の符号は

$$Q(r) = r^2 + (1-2\lambda)r + \lambda^2 - 2\lambda.$$

の符号と一致する。この 2 次式の判別式（discriminant）は $(1-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda) = 1 + 4\lambda$ であるから、その根は

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}}, \qquad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}},$$

であり、$Q(r) < 0$ となるのはちょうど $\alpha < r < \beta$ のときである。よって

$$d_{r+1} < d_r \iff \alpha < r < \beta, \qquad d_{r+1} > d_r \iff r < \alpha \text{ または} r > \beta.$$

ここで $\beta + 1 = \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ は整数でないから β も整数でなく、$k = \lfloor \beta + 1 \rfloor = \lfloor \beta \rfloor + 1$ は

$$k < \lambda + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} < k + 1.$$

を満たすただ一つの整数である。

考えてみよう $r < \alpha$ でも d_r は増加するのだから、そもそも d_r の最小値はどこで探せばよいだろうか。

小問 (i) より、$r < \lambda$ では $d_r > 0$、$r > \lambda$ では $d_r < 0$ であるから、最小値は負の項、すなわち $r \geq m+1$ の中にあるはずである。また $\beta > \lambda$（$\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$ より）かつ $\alpha < \lambda$ なので、$r \geq m+1$ を満たすすべての r は $r > \alpha$ を満たし、さらに $k > \beta > \lambda$ から $k \geq m+1$ が得られる。したがって整数 $r \geq m+1$ の範囲では次が成り立つ。

▶ $m+1 \leq r \leq k-1$ のとき：$r < \beta$ なので $e_r < 0$ であり、$d_{m+1} > d_{m+2} > \cdots > d_k$ となる。

▶ $r \geq k$ のとき：$r > \beta$ なので $e_r > 0$ であり、$d_k < d_{k+1} < d_{k+2} < \cdots$ となる。

($k = m+1$ のときは一つ目の列は空である。) よって d_k は他のどの負の d_r よりも真に小さく、もちろん正の d_r のどれよりも小さい。したがって d_r の最小値は $r = k$ でとられ、これが示すべきことであった。言い換えると、p_r が最も急に減少するのは $r = k-1$ から $r = k$ にかけてである。

小問 (iii)

まず、$\lambda < 1$ ならば小問 (i) よりすべての d_r は負である。ところが $r \to \infty$ のとき $d_r \to 0$ である（$p_r \to 0$ だから）。よってどの r に対しても d_r より大きい後の項が存在し、最大値はそもそもとられない。もちろん $r = 1$ で最大になることもない。したがって $\lambda > 1$ が必要である（λ は整数でないので $\lambda = 1$ は除外される）。

そこで $\lambda > 1$ とすると、$d_1 > 0$ である。正の項は $d_1, \ldots, d_m$ であり、最大値があるとすればこの中にある。

- 最大値が $r = 1$ でとられるならば、$d_2 < d_1$、すなわち $e_1 < 0$ である。
- 逆に $e_1 < 0$ ならば $\alpha < 1 < \beta$ であるから、$1 \le r < \beta$ を満たすすべての整数 r について $e_r < 0$ となる。$m < \lambda < \beta$ なので $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$ が得られ、それより後の項はすべて負である。よって最大値は $r = 1$ でとられる。

したがって $\lambda > 1$ のとき、最大値が $r = 1$ でとられるのはちょうど $e_1 < 0$、すなわち $Q(1) < 0$ のときである：

$$Q(1) = 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2 < 0 \iff 2 - \sqrt{2} < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

これを $\lambda > 1$ と合わせると（$2 - \sqrt{2} < 1$ に注意して）、求める条件は

$$1 < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

である。

小問 (iv)

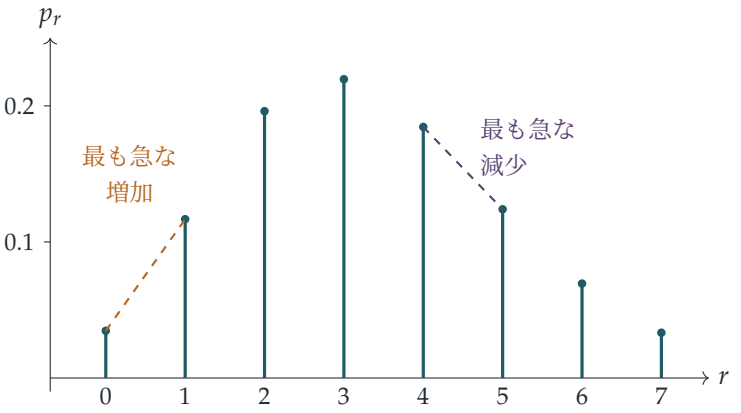
$\lambda = 3.36$ のとき $\lambda + \frac{1}{4} = 3.61 = 1.9^2$ であるから、次がわかる。

- 小問 (i) より、最頻値（mode）は $m = 3$ である。
- $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = 3.86 + 1.9 = 5.76$ なので $k = 5$ であり、最も急な減少は p_4 から p_5 にかけて起こる。
- $1 < 3.36 < 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$ なので、最も急な増加は p_0 から p_1 にかけて起こる（ただし僅差である：$\alpha = 0.96$ は 1 に近く、d_1 と d_2 はほぼ等しい）。

$p_r = \frac{3.36}{r} p_{r-1}$ と $p_0 = \mathrm{e}^{-3.36} \approx 0.035$ を用いると、近似値は次のようになる。

$$p_0, \ldots, p_7 \approx 0.035,\ 0.117,\ 0.196,\ 0.220,\ 0.185,\ 0.124,\ 0.069,\ 0.033.$$

概形のグラフでは、最初は急に増加し、その後なだらかになって $r = 3$ で山頂に達し、続いて減少が次第に急になり、$r = 4$ と $r = 5$ の間で最も急になったのち、ゆるやかになる様子を示せばよい。



検算

- $\lambda \in (0, 40)$ の無作為な値 20,000 個について p_r と d_r を計算すると、最頻値が $\lfloor \lambda \rfloor$ であること、d_r の最小値が $\left\lfloor \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \right\rfloor$ でとられること、そして（$\lambda > 1$ のとき）d_r の最大値が $r = 1$ でとられるのはちょうど $\lambda < 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$ のときであることが確かめられる。
- $\lambda = 3.36$ のとき：$d_1 \approx 0.0820$、$d_2 \approx 0.0794$ なので、d_1 が（僅差で）最大である。また $d_4, d_5, d_6 \approx -0.035, -0.061, -0.055$ なので、予想どおり d_5 が最小である。
- λ が小さい場合：$\lambda \to 0$ のとき $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \to 1$ なので $k = 1$ となる。実際このとき確率のほとんどは 0 に集中しており、最大の落ち込みは最初の $p_1 - p_0$ である。

よくある間違い

- $r < \alpha$ でも d_r が**増加する**ことを忘れ、その範囲に最小値が含まれ得ない理由（そこでは $d_r > 0$ である）を説明しないこと。
- 小問 (iii) で $d_2 < d_1$ だけを確認し、すべての d_r が負となって数列が最大値をとらない $\lambda < 1$ の場合を見落とすこと。

- $\lambda - 1 \leq m \leq \lambda$ と書いてしまうこと：λ が整数でないからこそ、不等式は等号を含まない。

STEP のその先へ

差分 d_r と e_r はそれぞれ 1 階導関数と 2 階導関数の離散版であり、k はポアソン分布の離散的な「変曲点」(point of inflection) の位置を示している。λ が大きいとき、ポアソン分布は平均 λ、標準偏差 (standard deviation) $\sqrt{\lambda}$ の正規分布 (normal distribution) に近く、その変曲点は $\lambda \pm \sqrt{\lambda}$ にある。ここでの $\alpha, \beta \approx \lambda \pm \sqrt{\lambda}$ と比べてみよ。比 p_r / p_{r-1} を用いる手法は離散分布の最頻値を求める標準的な方法であり、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率入門）でさらに詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。