解答例

STEP II 2025、第 11 問

確率・統計 ・ 期待値と二項係数の和

STEP II 2025、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらのゲームも最初の $2k$ が出た時点で終わるので、それぞれの量は振った回数 r についての和になる。アリの場合、和は幾何級数（geometric series）に近い形をしており、小問 (i) は振る回数の期待値（expected value）を求めるのにちょうど役立つ道具である。ゼンの場合、勝つゲームは $2k$ より前に**どの**数が現れるかによって決まる。集合がわかれば、増加する順序は一通りに定まってしまうからである。このような集合を数えると二項係数（binomial coefficients）が現れ、和は小問 (iii) のものになる。

解答

小問 (i)

$|x| < 1$ のとき、幾何級数により

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}.$$

べき級数（power series）はその収束区間（interval of convergence）の内部で項別に微分（term-by-term differentiation）できるので、両辺を x で微分すると

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

1 回の試行で起こる結果は 3 種類ある。

$$\mathrm{P}(\text{出た目が}2k) = \frac{1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{偶数かつ非}2k) = \frac{k-1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{奇数}) = \frac{1}{2}.$$

振った回数を R とする。アリが $R = r$ で勝つのは、ちょうど $1, \ldots, r-1$ 回目の目が $2k$ 以外の偶数で、r 回目の目が $2k$ であるときである。各回の試行は独立（independent）なので、$x = \dfrac{k-1}{2k}$ とおくと

$$\mathrm{P}(\text{アリが勝ち、かつ}R = r) = \frac{1}{2k}\, x^{r-1}.$$

(a) 幾何級数を和をとると（$0 \le x < 1$ に注意）

$$\mathrm{P}(\text{アリが勝つ}) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

これをすばやく確かめる方法もある。$2k$ 以外の偶数は結果に影響しないので無視する。するとゲームは、奇数と $2k$ のどちらが先に出るかで決まる。奇数の面は k 個、$2k$ の面は 1 個あり、どれも等しい確率で出るので、$2k$ が先に出る確率は $\frac{1}{k+1}$ である。

(b) アリは $R = r$ で勝てば £r を得て、そうでなければ何も得ない。よって小問 (i) により

$$\mathrm{E}(\text{アリの獲得額}) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \frac{1}{2k}\, x^{r-1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \text{ ポンド}.$$

小問 (iii)

与えられた式を S とおく。その一般項は $r = 0, 1, \ldots, n$ に対して $(r+1)\binom{n}{r}x^r$ である。因子 $r+1$ は x^{r+1} を微分することを示唆している。

$$S = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r} x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{r+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x(1+x)^n\Big),$$

ここで二項定理（binomial theorem）を用いた。積の微分法則（product rule）により

$$S = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}(1 + (n+1)x).$$

小問 (iv)

ゼンがちょうど r 回振って勝つとする。最後の目は $2k$ であり、最初の $r-1$ 回の目は $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ の中の狭義単調増加（strictly increasing）な数の列である。（ゲームは最初の $2k$ で終わるので、これらはいずれにせよすべて $2k$ 未満でなければならない。）

考えてみよう 長さ r の勝ちとなる列はいくつあるか。

狭義単調増加な列は、どの数が現れるかがわかれば決まってしまう。相異なる数の集合を増加順に並べる方法は一通りしかないからである。したがって、長さ r の勝ちとなる列は、$\{1,\dots,2k-1\}$ の $(r-1)$ 個の元からなる部分集合（subset）と一対一に対応する。そのような部分集合は $\binom{2k-1}{r-1}$ 個あり、$1 \le r \le 2k$ である。

r 回の目からなる特定の列が出る確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{2k}\right)^r$ である。よって

$$\mathrm{E}(\text{ゼンの獲得額}) = \sum_{r=1}^{2k} r\binom{2k-1}{r-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^r = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{2k-1}(j+1)\binom{2k-1}{j}\left(\frac{1}{2k}\right)^j,$$

ただし $j = r-1$ である。これは小問 (iii) の和で $n = 2k-1$、$x = \frac{1}{2k}$ としたものであり、このとき $1+(n+1)x = 1+2k\cdot\frac{1}{2k} = 2$ となる。したがって

$$\mathrm{E}(\text{ゼンの獲得額}) = \frac{1}{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot 2 = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \text{ ポンド.}$$

小問 (v)

ゼンの獲得額の期待値をアリのもので割ると

$$\rho = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot\frac{(k+1)^2}{2k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2}.$$

ここで k を大きくする。すると

- $\dfrac{(k+1)^2}{k^2} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2 \approx 1$；
- $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^2 \approx 1$；
- $n = 2k$ として与えられた近似式を用いると、$\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k} \approx \mathrm{e}$。

よって

$$\rho \approx \frac{\mathrm{e}}{2} \approx \frac{2.71828}{2} = 1.359\dots,$$

となり、k が大きいとき、ゼンの獲得額の期待値はアリのもののおよそ 1.359 倍、すなわち 35% より少し多いことになる。これが示すべきことであった。

検算

- $k = 1$ のとき、さいころは面が 1, 2 の硬貨である。アリが勝つのは最初の目が 2 のときだけで、その確率は $\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1}$ であり、そのとき £1 を得るので、獲得額の期待値は $\frac{1}{2} = \frac{2k}{(k+1)^2}$ となる。ゼンが勝つのは列 2（確率 $\frac{1}{2}$、獲得額 £1）と列 1, 2（確率 $\frac{1}{4}$、獲得額 £2）のときなので、獲得額の期待値は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ である。公式とも一致する。$k = 1$ のとき指数 $2k - 2$ は 0 なので、公式は $\frac{1}{1} \cdot 1 = 1$ を与える。
- $k = 3$ のとき、アリの獲得額の期待値は $\frac{3}{8}$、ゼンのものは $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^4 = \frac{2401}{3888} \approx 0.618$ である。どちらも、勝ちとなる列をすべて直接数え上げた結果とも、ゲームのコンピュータシミュレーションとも一致する。
- 比 ρ は $k = 10$ でおよそ 1.456、$k = 100$ で 1.369、$k = 10^4$ で 1.3592 である。これは $\mathrm{e}/2 = 1.35914\ldots$ に向かって減少している。

よくある間違い

- 小問 (iv) で、部分集合ではなく階乗を使って順序付きの列を数えてしまう。各集合を増加順に並べる方法は一通りしかない。
- ゼンのゲームで、それ以前の目に $2k$ が含まれ得ないことを忘れる。このため範囲は $\{1, \ldots, 2k-1\}$ となり、$n = 2k - 1$ であって $2k$ ではない。
- 小問 (ii) で、続行する確率として $\frac{k-1}{2k}$ ではなく $\frac{k}{2k}$ を使ってしまう。目 $2k$ は偶数だが、ゲームを終わらせる。

STEP のその先へ

小問 (iii) は**母関数**（generating functions）の小さな例である。数列をべき級数の係数として表し、その級数に微積分を用いるのである。確率母関数（probability generating functions）はこれをさらに推し進める。$G(s) = \mathrm{E}(s^X)$ とすると $\mathrm{E}(X) = G'(1)$ であり、これはまさにここで 2 度用いた微分の技法である。極限 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ は確率論のいたるところに現れ、たとえば二項分布のポアソン近似（Poisson approximation）にも登場する。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、母関数についての優れた章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。