解答例

STEP II 2025、第 10 問

力学 ・ 剛体棒の静力学

STEP II 2025、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

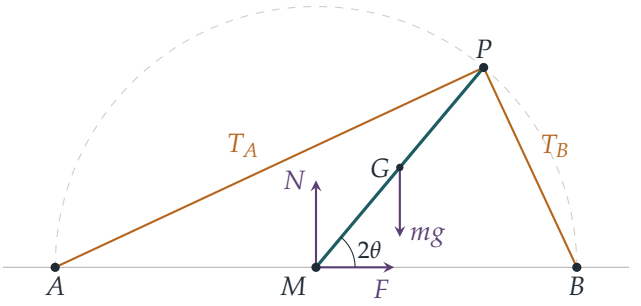
鍵となる考え方

$MA = MB = MP = a$ であるから、点 P は AB を直径とする円の上にある。この一つの観察がすべてを動かす。これにより P における角が直角であること、θ を用いた糸の長さ、そして各糸が棒となす角が得られる。フックの法則（Hooke's law）によれば張力（tension）は λ(長さ $-\ell$)$/\ell$ であり、これは自然に「$\lambda \times$ 長さ$/\ell$」の部分と定数「$-\lambda$」の部分に分かれる。この分け方こそが (i) で求められている分解である。その後は、うまく選んだ点のまわりのモーメント（moment）を考えることで、不要な力を消去する。

解答

棒は一様な剛体の棒とし、その重さ mg が中点 G にはたらくものとする。また、糸はフックの法則に従う軽い弾性糸（elastic string）とする。M を原点にとり、$B = (a, 0)$、$A = (-a, 0)$ とすると、

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$



（図中の摩擦力 F の向きが正しいことは小問 (iii) で示す。）

小問 (i)

$MA = MB = MP = a$ であるから、点 P は中心 M、直径 AB の円の上にある。半円に対する円周角の定理（angle in a semicircle）により、$\angle APB = 90^\circ$ である。

糸の長さ。三角形 MPA は $MP = MA$ の二等辺三角形（isosceles triangle）で、頂角は $\angle PMA = 180^\circ - 2\theta$ であるから、底角は $\angle MPA = \angle MAP = \theta$ である。同様に三角形 MPB の頂角は 2θ であるから、$\angle MPB = 90^\circ - \theta$ である。斜辺が $AB = 2a$ で $\angle PAB = \theta$ の直角三角形 APB において、

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

$\theta < 45^\circ$ より $PB < PA$ である。どちらの糸も張っているので、$2a\sin\theta > \ell$ である。

力の分解。P から A、B へ向かう単位ベクトル（unit vector）をそれぞれ $\mathbf{u}_A$、$\mathbf{u}_B$ とする。フックの法則により糸 PA の張力は $\lambda(PA - \ell)/\ell$ であるから、この糸が P において棒に及ぼす力は

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

であり、PB についても同様である。二つを加えると、

$$\text{糸の力の合計} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

ここで M は AB の中点であるから $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$ であり、$|\overrightarrow{PM}| = a$ である。よって第 1 項は、棒に沿った（M へ向かう）大きさ $2a\lambda/\ell$ の力である。

第 2 項については、$\mathbf{u}_A$ と $\mathbf{u}_B$ は互いに垂直な単位ベクトルである（P における角が直角だから）。したがって $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$ は単位正方形の対角線であり、長さは $\sqrt{2}$、向きは $\angle APB$ の二等分線（bisector）に沿う。ゆえに $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$ は $\angle APB$ の二等分線に沿った（AB から遠ざかる向きの）大きさ $\sqrt{2}\lambda$ の力である。これが求める分解である。

小問 (ii)

M のまわりのモーメントを考える。そこにはたらく摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）のモーメントは 0 である。反時計回りを正とする（B は右側にあるものとする）。

? **考えてみよう** M から各糸の直線までの距離はいくらか。

直線 PA は PM と角 $\angle MPA = \theta$ をなし、$PM = a$ であるから、M から直線 PA までの距離は $a\sin\theta$ である。同様に、M から直線 PB までの距離は $a\sin(90^\circ - \theta) = a\cos\theta$ である。重さは M から右へ水平距離 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ の位置にはたらく。

糸 PA は P を A の方へ引く（M のまわりに反時計回り）。PB と重さは棒を時計回りに回す。張力を T_A、T_B と書くと、

$$T_A\, a\sin\theta \;=\; T_B\, a\cos\theta + mg\cdot\tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

$T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$、$T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$ を用いると、

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\left(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\right) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

（棒に沿った力は M のまわりのモーメントをもたないので、これはちょうど二等分線方向の力 $\sqrt{2}\lambda$ のモーメントにほかならない。）よってモーメントの式は

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

となる。$0 < \theta < 45^\circ$ より $\cos\theta - \sin\theta > 0$ であるから、これで割ってよく、

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ の範囲。$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$ と書く。棒は地面に対して傾いているので $0 < \theta < 45^\circ$ であり、$45^\circ < \theta + 45^\circ < 90^\circ$ となる。この範囲で sin は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ から 1 まで狭義単調増加する。よって

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

であり、これがこのようなつり合い（equilibrium）のための必要条件である。

小問 (iii)

> **考えてみよう** どの点を選べば、二つの糸の力がともにモーメントの式から消えるか。

二つの糸はともに P にはたらくので、P のまわりのモーメントを考える。すると現れるのは重さと、M における地面からの二つの力だけである。P から見て、点 M は水平方向に $a\cos 2\theta$（左へ）、鉛直方向に $a\sin 2\theta$（下へ）の位置にあり、G はそれぞれその半分の位置にある。

摩擦力 F が B の向きにはたらくと仮定する（これは後で確かめる）。P のまわりで、

- N（M において上向き、P の左側）の時計回りのモーメントは $N\,a\cos 2\theta$ である。
- F（M において B の向き、P の下側）の反時計回りのモーメントは $F\,a\sin 2\theta$ である。
- mg（G において下向き、P の左側）の反時計回りのモーメントは $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ である。

つり合いより、

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

$2\theta < 90^\circ$ より $\cos 2\theta > 0$ であり、$a\cos 2\theta$ で割ると

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

となり、示すべき式が得られる。

摩擦力の向き。水平方向に分解すると、F は糸の力の水平成分とつり合う。(i) より $\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$、$\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$ であり、$\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$ であるから、糸の力の水平成分は $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$ である。よって B の向きの摩擦力は

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

であり、$2a\sin\theta > \ell$（両方の糸が張っている）より、これは正である。したがって摩擦力は確かに B の向きにはたらき、F はその大きさである。

検算

- (ii) の極限は理にかなっている。$\theta \to 0$ のとき棒はほぼ水平に寝て $\lambda \to \frac{1}{2}mg$ となり、$\theta \to 45^\circ$ のとき棒は鉛直になって $\lambda \to mg/\sqrt{2}$ となる。
- 数値で確かめる。$a = 1$、$mg = 10$、$\theta = 20^\circ$、$\ell = 0.5$ とすると、$\lambda = 5(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \approx 6.408$、張力は $T_A \approx 17.68$、$T_B \approx 2.36$ であり、力を分解すると $N \approx 18.26$、$F \approx 15.81$ となるので、$N - F\tan 40^\circ \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$ である。M のまわりのモーメントもつり合っている。数千通りのランダムな配置についてコンピュータで確かめたところ、すべての結果が丸め誤差の範囲で成り立った。

よくある間違い

- 張力を $\lambda\times$ 伸び$/\ell$ ではなく $\lambda\times$ 伸び としてしまう。
- $\theta < 45^\circ$ よりそれらが正であることに触れずに、$\cos\theta - \sin\theta$ や $\cos 2\theta$ で割ってしまう。

► (iii) で M のまわりのモーメントを考えてしまう。これでは求めたい力である N と F がまさに消えてしまう。P のまわりのモーメントを考えれば、代わりに糸の力が消える。

STEP のその先へ

(i) の分解は、一般的な事実のきれいな一例である。剛体（rigid body）にはたらく力の集まりは、一つの力と一つの偶力（couple）に等価であり、モーメントが最も計算しやすくなるように力を自由にまとめてよい。ここでの「糸 1 本あたり $-\lambda$」の部分は、張力が一定の 2 本の糸のようにふるまい、その合力は幾何学的な配置だけで決まる。剛体の静力学、仮想仕事（virtual work）、つり合いの安定性については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。