解答例

STEP II 2025、第 1 問

純粋数学 • 区分的に定義された関数

> **STEP II 2025、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

Min を用いて作られた関数は、区間ごとに異なる式で与えられる普通の関数にすぎない。したがって、まず毎回行うべきことは、二つの引数の大小が入れ替わる点を求め、関数を区分的（piecewise）に書き表し、そのうえで区間ごとに処理を進め、得られた答えのうち、それを導いた式が成り立つ区間に入っているものだけを残すことである。つなぎ目では関数は連続（continuous）であるが、たいていは角（corner）をもつ。そしてこの角こそが、(iv) の点が導関数（derivative）を 0 にすることなく極大（local maximum）となる理由である。

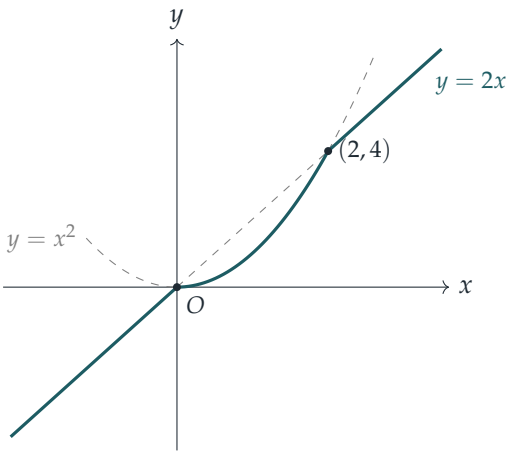
解答

小問 (i)

$x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$ である。よって

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ または } x > 2. \end{cases}$$

グラフは直線 $y = 2x$ に沿っているが、$x = 0$ から $x = 2$ の間だけは放物線（parabola）上に沈み込む。この範囲では放物線はその弦（chord）より下にあるからである。直線部分の二つはいずれも同じ直線上にある。$(0,0)$ では放物線の傾き（gradient）が 0、直線の傾きが 2 であり、$(2,4)$ では傾きがそれぞれ 4 と 2 であるから、これら二点に角がある。



小問 (ii)

(i) で求めた二つの式を用いる。

- $0 \leq x \leq 2$ のとき：$2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$ より $x = 1$ または $x = \frac{3}{2}$ である。どちらも $[0,2]$ に含まれるので、両方とも解である。
- $x < 0$ または $x > 2$ のとき：$4x = 5x - 3 \iff x = 3$ であり、これは $x > 2$ を満たすので解である。

解は $x = 1$、$x = \frac{3}{2}$、$x = 3$ である。

小問 (iii)

二つ目の関数も必要である：$x^3 \leq 4x \iff x(x-2)(x+2) \leq 0 \iff x \leq -2$ または $0 \leq x \leq 2$ である。両者を合わせると

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \leq -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \leq x \leq 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$。

- $x \leq -2$：$x^3 + 2x = 2x$ より $x = 0$ となるが、これは区間に含まれない。
- $-2 < x < 0$ および $x > 2$：$6x = 2x$ より $x = 0$ となるが、これはどちらの区間にも含まれない。

- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$ より $x = 0$ または $x = 1$ である（$x = -2$ は除く）。

よって $m = 2$ のとき、解は $x = 0$ と $x = 1$ である。

考えてみよう 方程式 $6x = 6x$ はどうなるか？

これは**すべての** x について成り立つ。したがって $m = 6$ のときは、孤立した点だけでなく区間全体が解となる。

$m = 6$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$ であり、区間に含まれるのは $x = -2$ のみである。
- $-2 < x < 0$ および $x > 2$：$6x = 6x$ は恒等的に成り立つので、これらの区間のすべての x が解である。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$ より $x = 0$ または $x = 2$ である（$x = -3$ は除く）。

以上をまとめると、$m = 6$ のときの解の集合は

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{または} \quad x \ge 2.$$

小問 (iv)

ここでは $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$ である（因数 x^2 は負にならず、$x = 0$ のときは等号が成り立つ）。よって

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

$x = 1$ ではどちらの式も $y = -3$ を与えるので、曲線はそこで連続であり、点 $(1, -3)$ を通る。

点 $(1, -3)$。 これは停留点（stationary point）ではない。$x = 1$ における左側からの傾きは $6x^2 - 5 = 1$ であり、右側からの傾きは $4x - 5 = -1$ である。より正確に述べると、

- $\sqrt{5/6} < x < 1$ では $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$ であるから、y は -3 まで増加する。
- $1 < x < \frac{5}{4}$ では $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$ であるから、y は -3 から減少する。

したがって $x=1$ の両側の近くのすべての点で $y<-3$ であり、$(1,-3)$ は極大点であって、曲線の角となっている。

その他の極値点。 $x<1$ では、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=6x^2-5=0$ より $x=\pm\sqrt{5/6}=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}$ であり、どちらも 1 より小さい。$2x^2=\frac{5}{3}$ を用いると

$$y=x(2x^2-5)=-\tfrac{10}{3}x=\mp\tfrac{10}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{30}}{6}=\mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=12x$ であるから、$x<0$ の点は極大、$x>0$ の点は極小（minimum）である。$x>1$ では、$4x-5=0$ より $x=\frac{5}{4}$ であり、$y=\frac{25}{8}-\frac{25}{4}=-\frac{25}{8}$ である。放物線は下に凸であるから、これは極小である。よって残りの三つの極値点（turning point）は

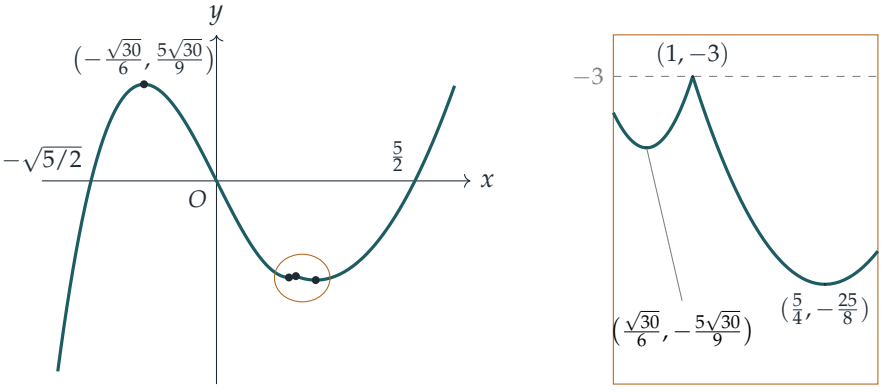
$$\text{極大}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right),\qquad \text{極小}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{ と }\left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

概形。 三次関数 $2x^3-5x$ は奇関数（odd function）であるから、曲線のうち $-1\le x\le 1$ の部分は原点に関して回転対称である。曲線が軸と交わるのは、$x\le 1$ で $x(2x^2-5)=0$ となる点、すなわち $x=0$ と $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$、および $x>1$ で $x(2x-5)=0$ となる点、すなわち $x=\frac{5}{2}$ である。$x\to-\infty$ のとき $y\to-\infty$、$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ である。

$x=1$ の近くにある三点は互いに非常に近いので、その上下関係を確かめておく価値がある。正の数 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ と $\frac{25}{8}$ を二乗すると $\frac{750}{81}\approx 9.26$ と $\frac{625}{64}\approx 9.77$ になるから

$$-\tfrac{25}{8}<-\tfrac{5\sqrt{30}}{9}<-3:$$

すなわち、$x=\frac{5}{4}$ における極小のほうが低く、二つの極小はいずれも角より下にある。適切な縮尺ではこの細部は見えないので、挿入図で拡大して示す。



検算

- (ii)：$x = \frac{3}{2}$ では $\mathrm{Min}(\frac{9}{4}, 3) = \frac{9}{4}$ であり、$2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 5 \cdot \frac{3}{2} - 3$ となる。$x = 3$ では $\mathrm{Min}(9, 6) = 6$ であり、$12 = 15 - 3$ となる。
- (iii)、$m = 6$：$x = -1$ を試すと $\mathrm{Min}(1, -2) + \mathrm{Min}(-1, -4) = -2 - 4 = -6 = 6x$ となる。また、解の集合に含まれない $x = 1$ では $1 + 1 = 2 \neq 6$ となる。
- (iv)：$[-3, 3]$ 上で 10^{-5} 刻みに y をコンピュータで調べたところ、極値点はちょうど四つ、$x \approx -0.9129$（$y \approx 3.0429$）、0.9129（-3.0429）、1（-3）、1.25（-3.125）に見つかり、上で求めた値と一致した。

よくある間違い

- その式が適用される区間の外にある根を残してしまうこと。たとえば (iii) の $m = 2$ における $x = -2$ である。
- $6x = 6x$ を、区間全体で成り立つと認識せずに、一つの値を与えるかのように解いてしまうこと。
- (iv) の曲線を $(1, -3)$ で滑らかに描いてしまうこと。そこには本当に角があり、左側の傾きは 1、右側の傾きは -1 である。

STEP のその先へ

$\mathrm{Min}(f, g) = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right)$ のような関数は、f と g が連続ならば常に連続であるが、微分可能（differentiable）であるとは限らない。そして (iv) は、極大点が停留点であるとは限らないことを示している。解析学（analysis）の講義では、このことから「**微分可能な**関数の極値（extrema）は導関数が 0 となる点でとられる」という結果の注意深い述べ方や、片側微分係数（one-sided derivatives）へと話が進む。この種の区分的に定義された関数は最適化（optimisation）においても中心的な役割を果たし、そこではいくつかの一次関数の最小値が、線形計画法（linear programming）で調べられる角を生み出す。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、まさにこの種の例を念頭に置いて連続性と微分可能性を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。