解答例

STEP III 2024、第 9 問

力学 ・ 斜め衝突

> **STEP III 2024、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべてはテーブルの平面内で起こるので、真上から見下ろして考える。各球は、最下点を中心とする半径 r の円になる。なめらかな（smooth）球どうしでは、撃力（impulse）は中心線（line of centres）に沿って働く。そこで速度を、その直線に沿った成分（運動量保存と反発の法則が適用される）と、それに垂直な成分（変化しない）とに分解する。その後 B は直線運動をするので、B が C に当たるかどうかは点と直線の距離の問題になる。

解答

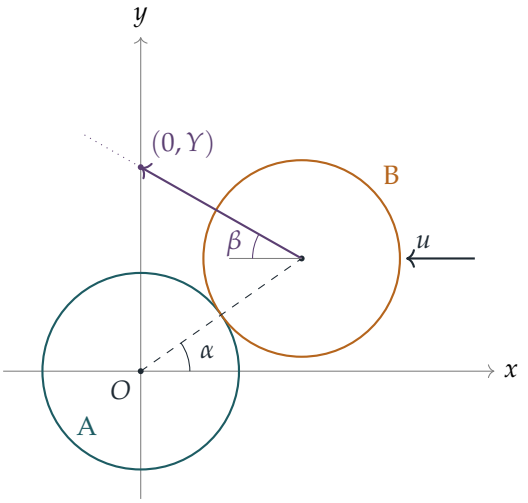
球はなめらかで質量が等しく、テーブルもなめらかであるとモデル化する。したがってどこにも摩擦はなく、各球は衝突の瞬間を除いて一定の速さで直線運動をする。以下では最下点を用いて考える。最下点は水平方向には中心とまったく同じように動く。半径 r の 2 つの球は、最下点どうしの距離が $2r$ のときに接する。

小問 (i)

B の最下点は直線 $y = 2r\sin\alpha$ 上を動く。B が A に接するのは、B の最下点の O からの距離が $2r$ になるときであり、それは点 $(2r\cos\alpha,\, 2r\sin\alpha)$ である（B は x が大きい正の側からやってくるので、x 座標は正の方をとる）。よって衝突の瞬間、A から B へ向かう中心線の単位ベクトル（unit vector）は

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{であり、} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

はこれに垂直である。



衝突前の B の速度は $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、その **n** 方向の成分は $-u\cos\alpha$、**t** 方向の成分は $u\sin\alpha$ である。A は静止している。

球はなめらかなので、両者の間の撃力は **n** 方向に働く。よって B の **t** 成分は $u\sin\alpha$ のままである（また A は **t** 成分をもたない）。衝突後の **n** 成分をそれぞれ v_A、v_B とする。**n** 方向の運動量保存（conservation of momentum）（質量は等しい）とニュートンの反発法則（Newton's law of restitution）から

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}(0 - (-u\cos\alpha)) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

を得る（**n** 方向の接近の速さは $u\cos\alpha$ であり、**n** の正の側にある B が A から離れていく）。辺々加えると $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$ となり、$v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$ である。

よって衝突後の B の速度は

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

である。ここで $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)

両成分とも 0 でなく、x 成分は負、y 成分は正である（α は鋭角であるから）。よって B はこのあと左上へ進み、その経路の傾き（gradient）の大きさは

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1+2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

である。ここで β は経路が x 軸の負の向きとなす鋭角である。B の最下点は $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$ から出発する。y 軸に達するには x が $2r\cos\alpha$ だけ減少しなければならず、その間に y は $2r\cos\alpha\tan\beta$ だけ増加する。よって B は y 軸と点 $(0, Y)$ で交わり、

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

となる。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

衝突後、B は一定の速さで直線運動をし、$(0, Y)$ を通り単位方向ベクトル $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$ をもつ直線 ℓ に沿って進む。C は何かが当たるまで $(0, h)$ に静止している。B が C に衝突するのは、$(0, h)$ から B の経路までの距離が $2r$ を下回るときであり、かつそのときに限る。

$(0, h)$ から ℓ への垂直距離（perpendicular distance）は、$(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$ の $\mathbf{d}$ に垂直な成分の大きさである。ℓ の単位法線ベクトル（unit normal）の 1 つは $(\sin\beta, \cos\beta)$ なので、この距離は

$$|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)| = |h - Y|\cos\beta,$$

となる。β は鋭角なので $\cos\beta > 0$ であることを用いた。$h > Y + 2r\sec\beta$ ならば $h - Y > 2r\sec\beta > 0$ であり、距離は $(h - Y)\cos\beta > 2r$ となる。直線全体のうち最も近い点だけでなく、B の経路上のすべての点が C の最下点から少なくともこの距離だけ離れている。よって B が C から $2r$ 以内に近づくことはなく、B は C に衝突しない。

（ほかに邪魔をするものはない。A は速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$ で $y < 0$ の領域へ動き去り、B からも C からも遠ざかる。）

> **考えてみよう** 小問 (iv) では $Y < 2r\sec\beta$ を証明することが求められている。これを 1 つの三角関数の事実に帰着できるだろうか。

できる。両辺に $\cos\beta > 0$ を掛ければ、左辺は加法定理（compound-angle formula）の形になる。

小問 (iv)

$2r$ で割り、$\cos\beta > 0$ を掛けると、不等式 $Y < 2r\sec\beta$ は

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{すなわち} \qquad \sin(\alpha+\beta) < 1.$$

と同値である。もちろん $\sin(\alpha+\beta) \le 1$ であり、等号は $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ のときに限り成り立つ（$0 < \alpha+\beta < \pi$ であるから）。それは $\tan\beta = \cot\alpha$、すなわち

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

（$\cos\alpha \neq 0$ で割った）を意味するが、これは不可能である。よって $\sin(\alpha+\beta) < 1$ であり、したがって $Y < 2r\sec\beta$ である。

これを用いて。いま

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

であるから、すべての鋭角 α にわたる $\sec\beta$ の上界、すなわち $\tan\beta$ の上界が必要である。分母と分子を $\cos^2\alpha$ で割り、$t = \tan\alpha > 0$ とおくと、

$$\tan\beta = \frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha + 2\tan^2\alpha} = \frac{2t}{1+3t^2} \le \frac{2t}{2\sqrt{3}\,t} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

となる。ここで相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）$1+3t^2 \ge 2\sqrt{3}\,t$ を用いた（等号は $t = 1/\sqrt{3}$、すなわち $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき）。よって $0 < \beta \le \frac{\pi}{6}$ であり、$\sec\beta \le \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ を得る。したがって、すべての鋭角 α に対して

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta \le \frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

が成り立つ。$h > \dfrac{8r}{\sqrt{3}}$ ならば $h > Y + 2r\sec\beta$ であり、小問 (iii) より、α の値にかかわらず B は C に衝突しない。

検算

- 運動量：A の速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ と小問 (i) の B の速度を加えると $(-u, 0)$ になる。質量が等しいので、こうなるべきである。
- $\alpha = 0$（正面衝突）のとき、公式から B の速度は $(-\frac{1}{3}u, 0)$、A の速度は $(-\frac{2}{3}u, 0)$ となる。これは質量が等しく $e = \frac{1}{3}$ の場合のおなじみの 1 次元の答えである。
- $\alpha = \frac{\pi}{6}$ とすると $\tan\beta = 1/\sqrt{3}$ なので $\beta = \frac{\pi}{6}$、$\alpha+\beta = \frac{\pi}{3}$ であり、$Y = 2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}) = 2r$ となる。これは $2r\sec\beta = 4r/\sqrt{3} \approx 2.31r$ より十分小さい。このとき $Y + 2r\sec\beta \approx 4.31r$ であり、$8r/\sqrt{3} \approx 4.62r$ を下回る。

- 20,000 個のランダムな α の値についてコンピュータで確認した。B の直線経路を少しずつ進めると上記の交点 Y が得られること、$h = Y + 2r\sec\beta$ のわずかに上では B は C に当たらず、わずかに下では当たること、そして $\sec\beta$ の最大値が $1.1547\ldots = 2/\sqrt{3}$ であることである。

よくある間違い

- 中心線に沿った成分ではなく、x 成分に反発の法則を適用してしまう。なめらかな球どうしの撃力は中心線に沿って働き、ここでは中心線は x 軸と角 α をなしている。
- 衝突の瞬間の中心線を x 軸方向や y 軸方向にとってしまう。接触点は、球どうしの距離が $2r$ であることによって定まる。
- 小問 (iii) で、C の最下点が経路全体からではなく、1 点 $(0, Y)$ から $2r$ 以内にあるかどうかを調べてしまう。

STEP のその先へ

速度を、選んだ単位ベクトルに沿った成分とそれに垂直な成分とに分解することは、正規直交基底（orthonormal basis）への射影（projection）にほかならない。これは大学 1 年の線形代数（linear algebra）と力学（mechanics）を貫く考え方である。なめらかな球の斜め衝突（oblique collision）は散乱（scattering）の最初のモデルであり、物理学者は気体や粒子の衝突を研究するのにこれを用いる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このベクトルによる方法で 2 次元の衝突を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。