解答例

STEP III 2024、第 8 問

純粋数学 • 交わる 2 次曲線

STEP III 2024、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

$y^2 - x^2 + \ldots$ の形の二次式が傾き（gradient）± 1 の 2 直線に分解されるのは、平方完成（completing the square）をしたときに定数項が残らない場合にちょうど限られる。問題の残りの部分での工夫は、一方の曲線の方程式の定数倍を他方の方程式に加えても共有点は失われないという点にある。うまく選んだ定数倍によって、厄介な四次式（quartic）の問題が「どの直線が放物線（parabola）と交わるか」という問題に変わり、これは 2 つの二次方程式を調べるだけで済む。

解答

小問 (i)

積が 0 となるのは因数のいずれかが 0 となるときに限るから、$(y-x+3)(y+x-5)=0$ を満たす点は、$y = x - 3$（傾き 1）上の点と $y = -x + 5$（傾き -1）上の点を合わせたものである。

一般の方程式については、両方の変数について平方完成する：

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = (y + \tfrac{1}{2}p)^2 - (x - \tfrac{1}{2}q)^2 - K, \qquad \text{ただし} K = \tfrac{1}{4}(p^2 - q^2) - r.$$

$Y = y + \frac{1}{2}p$、$X = x - \frac{1}{2}q$ とおく。これは平行移動（translation）であり、傾きを変えない。方程式は $(Y - X)(Y + X) = K$ となる。

$p^2 - q^2 = 4r$ ならば、$K = 0$ であり、方程式は $(Y - X)(Y + X) = 0$ となる。最初の段落により、これは傾き 1 と -1 の 2 直線 $Y = X$ と $Y = -X$ を表す。もとの座標では、

これらは

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p+q) = 0 \quad \text{および} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p-q) = 0.$$

である。

逆に、方程式が傾き ± 1 の 2 直線を表すと仮定し、$K = 0$ を示す。一方の直線は傾き 1 をもつから $Y = X + c$ の形であり、その上のすべての点が方程式を満たす。この直線上では $(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$ であるから、**すべての**実数 X に対して $2cX + c^2 = K$ が成り立つ。X の一次関数が定数となるのはその係数が 0 のときに限るから $c = 0$ であり、したがって $K = c^2 = 0$ である。よって $p^2 - q^2 = 4r$ となり、「必要十分条件」が証明された。

小問 (ii)

点が C_1 上にあれば、そこで $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$ が成り立ち、C_2 上にあれば、そこで $y - x^2 = 0$ が成り立つ。したがって共有点においては、式

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

は k の値によらず $0 + k \cdot 0 = 0$ となる。

$k = 1$ とすると方程式は

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

となり、これは小問 (i) の形で $p = 2s + 1$、$q = -1$、$r = s(s+1)$ としたものである。このとき

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

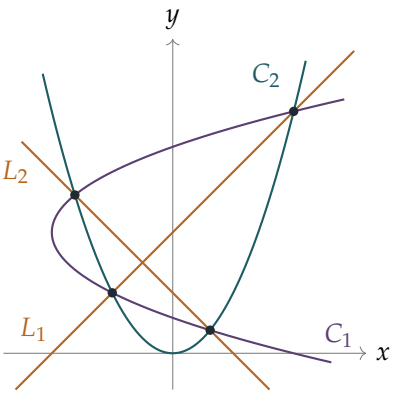
であるから、小問 (i) によりこれは傾き 1 と -1 の 2 直線の組である。小問 (i) の因数分解（factorisation）を $\frac{1}{2}(p+q) = s$、$\frac{1}{2}(p-q) = s + 1$ として用いると、方程式は

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

となるから、2 直線は

$$L_1 : \ y = x - s \qquad \text{および} \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

である。最初の段落により $C_1 \cap C_2$ のすべての点はこの方程式を満たすから、4 つの交点はすべて $L_1 \cup L_2$ 上にある。（これはすべての s について成り立つ。4 つの点が存在することは一度も必要としなかった。）



図は $s=-2$ の場合を示している。C_1 は $x=(y-2)^2-2$ であり、C_1 と C_2 の 4 つの共有点は、直線 $y=x+2$ と $y=1-x$ の上に 2 つずつある。

小問 (iii)

C_1 と C_2 のすべての共有点は、C_2 上にあり、かつ L_1 または L_2 上にある。$y=x^2$ を代入すると：

$$\text{直線}L_1:\quad x^2-x+s=0,$$
$$\text{直線}L_2:\quad x^2+x+s+1=0.$$

C_2 上の点は x 座標によって定まるから、各直線は C_2 と高々 2 点で交わる。したがって相異なる 4 つの共有点があるためには、各二次方程式が相異なる 2 つの実数解をもたなければならず、両方の判別式（discriminant）が正である：

$$1-4s>0 \quad \text{かつ} \quad 1-4(s+1)>0.$$

2 つ目から求める $s<-\frac{3}{4}$ が得られる。（1 つ目の $s<\frac{1}{4}$ はこのとき自動的に成り立つ。）

考えてみよう 小問 (iv) において、C_2 と $L_1\cup L_2$ の上にある 4 点を見つけるだけでは不十分なのはなぜか。

小問 (ii) で示したのは、C_1 と C_2 の共有点が 2 直線上にあることだけである。逆向きも必要であり、さらに 4 点が重ならないことも確かめなければならない。

小問 (iv)

$s<-\frac{3}{4}$ とする。このとき上の 2 つの判別式はともに正であり（$-3-4s>0$、また $1-4s>4>0$）、L_1 は C_2 と相異なる 2 点で交わり、L_2 も同様である。

これら 4 点は相異なる。 2 回数えられる点があるとすれば、それは L_1 と L_2 の両方の上にある。2 直線が交わるのは $x-s=-x-s-1$ のとき、すなわち点 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-s)$

においてである。この点が C_2 上にあるのは $-\frac{1}{2}-s=\frac{1}{4}$、すなわち $s=-\frac{3}{4}$ のときに限るが、これは除外されている。よって相異なる 4 点が得られる。

それぞれの点は C_1 上にある。各点において $y-x^2=0$ が成り立ち（C_2 上にあるから）、小問 (ii) の $k=1$ の方程式が成り立つ（L_1 または L_2 上にあるから）。辺々引くと

$$y^2+2sy+s(s+1)-x=0,$$

となり、これは C_1 の方程式である。

したがって C_1 と C_2 は少なくとも 4 つの相異なる共有点をもつ。小問 (iii) の議論により、4 つより多くはもちえない。よって両者はちょうど 4 つの相異なる点で交わる。

検算

- $y=x^2$ を C_1 に代入すると四次式 $x^4+2sx^2-x+s^2+s=0$ が得られる。$(x^2-x+s)(x^2+x+s+1)$ を展開するとちょうどこれになり、2 直線の組であることが確認できる。
- $s=-2$ のとき 4 点は $(2,4)$、$(-1,1)$ および $\left(\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5}),\ \frac{1}{2}(3\mp\sqrt{5})\right)$ であり、いずれも $x=(y-2)^2-2$ を満たす。例えば $(2,4)$ については $(4-2)^2-2=2$ である。
- 境界 $s=-\frac{3}{4}$ では二次方程式は $x^2-x-\frac{3}{4}=0$（解 $\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$）と $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$ になり、相異なる共有点は 2 つしかなく、$x=-\frac{1}{2}$ が両方の直線で共有される。コンピュータで四次式の実数解の個数を数えると、$s=-0.76,-1,-2$ では 4 個、$s=-0.74,-0.5$ では 2 個であった。

よくある間違い

- 小問 (i) で「ならば」の向きしか証明しないこと。2 直線の組であれば $p^2-q^2=4r$ とならなければならず、そのための議論（上のようなもの）が必要である。
- 小問 (iv) で、2 直線が C_2 上の点を共有しないことの確認を忘れたり、求めた点が実際に C_1 上にあることを示し忘れたりすること。

STEP のその先へ

族 $F+kG=0$ は**二次曲線束**（pencil of conics）である。その各メンバーは $F=0$ と $G=0$ の共有点を通る。メンバーが退化（degenerate）する（2 直線の組になる）ように k を選ぶのは、2 つの二次曲線の交点を求める古典的な方法である。射影幾何学（projective geometry）では、これは 3×3 行列式（determinant）を 0 にすることで行

われ、k についての三次方程式が得られる。ここでは束が s によらず $k = 1$ で退化していたのである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次曲線の背後にある対称行列（symmetric matrix）を扱っている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。