解答例

STEP III 2024、第 7 問

純粋数学 • e の 2 乗の無理性

STEP III 2024、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.4 節「e は無理数であり、e^2 もまた無理数である」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/e-irrational.html

鍵となる考え方

2 つの級数（series）はいずれも、指数関数の級数に階乗を掛けたものの裾（tail）である。$\mathrm{e} = \sum 1/r!$ に $(2n)!$ を掛けると、$r = 2n$ までの項はすべて整数となり、それ以降の部分はちょうど $\mathrm{f}(2n)$ になる。$1/\mathrm{e}$ と $\mathrm{g}(2n)$ についても同じことが起こる。もし e^2 が有理数（rational）であれば、これらの小さな裾の組合せは整数でなければならないが、それは 0 と 1 の間に厳密に挟まれてしまう。

解答

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

とおくと、$\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$、$\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$ である。また $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$ であることに注意する。

小問 (i)

すべての a_k は正であるから、$\mathrm{f}(n) > 0$ である。a_k の分母の各因数は $n+1$ 以上であるから $a_k \leq 1/(n+1)^k$ であり、$k \geq 2$ ならば（因数 $n+2$ が現れるので）厳密な不等式（strict inequality）が成り立つ。公比 $\frac{1}{n+1} < 1$ の等比級数（geometric series）と比較す

ると、

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

よって $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$ である。

小問 (ii)

$n+k+1 > 1$ であるから $a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$ となり、隣り合う項は狭義単調減少である。最初から 2 項ずつまとめると、

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

となる。各括弧は正だからである。代わりに第 1 項の後からまとめると、

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

となる。ここでも各括弧は正だからである。したがって $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$ である。

小問 (iii)

$m = 2n$ とおく。$\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0} 1/r!$ を用いると、

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

$r \leq m$ のとき $m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$ は整数であるから、第 1 の和は整数である。これを A とおく。第 2 の和において $m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$ であり、これは $\mathrm{f}(m)$ の第 k 項である。よって $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$ であり、$(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$ は整数である。

同様に $1/\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0}(-1)^r/r!$ から

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

を得る。

考えてみよう なぜこの問題では n ではなく $2n$ を用いるのだろうか。

$m = 2n$ は偶数であるから $(-1)^{m+k} = (-1)^k$ となり、裾は $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$ である（ここで a_k は m から作ったものとする）。したがって $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$ であり、$\dfrac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$ は整数である。（m が奇数ならば裾は $+\mathrm{g}(m)$ となり、代わりに負の符号が必要になる。）

小問 (iv)

小問 (iii) の整数 A と B を用いると、

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\Big(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\Big) \\ &= (2n)!\Big(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\Big) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

となる。$q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ だからである。p, q, A, B は整数であるから、すべての正の整数 n に対して $q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ も整数である。

小問 (v)

背理法（proof by contradiction）のため、e^2 が有理数であると仮定する。$\mathrm{e}^2 > 0$ であるから、正の整数 p, q を用いて $\mathrm{e}^2 = p/q$ と書け、両辺を e で割ると $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ を得る。小問 (iv) より、すべての $n \geq 1$ に対して $N_n = q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$ は整数である。

考えてみよう どうすれば N_n が整数になりえないことを示せるだろうか。

小問 (i) と (ii) を $2n$ に適用して挟み込む。$p, q > 0$ であるから、

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

ここで $2n > p + q$ となるように n を十分大きくとる。すると $0 < N_n < 1$ となり、N_n は 0 と 1 の間に厳密に挟まれた整数ということになるが、これはありえない。よって e^2 は無理数（irrational）である。

検算

小さな場合は正確に和を計算できる。$n = 2$ のとき、小問 (iii) は $24\mathrm{e} - \mathrm{f}(4)$ が整数であることを主張している。実際 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$ であり、$\mathrm{f}(4) = 24\mathrm{e} - 65 \approx 0.2388$ は余裕をもって $(0, \frac{1}{4})$ に入っている。同様に $\mathrm{f}(2) = 2\mathrm{e} - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$、$\mathrm{g}(2) = 1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$ である。コンピュータによる検証で、$n \leq 24$ に対する (i) と (ii) の評価、$2n \leq 22$ に対する (iii) の整数性、およびランダムな p, q に対して $0 < q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) < (p+q)/(2n)$ が成り立つことを確認した。

よくある間違い

- すべての k に対して $a_k < 1/(n+1)^k$ と主張すること。$k = 1$ では等号が成り立つので、厳密な不等式は $k \geq 2$ の項から生じる。

- $1/\mathrm{e}$ の展開における裾の符号を忘れること。それが $-\mathrm{g}(2n)$ となるのは、$2n$ が偶数だからにほかならない。
- 「N_n は小さい」で止まってしまうこと。矛盾を導くには $N_n > 0$ も必要であり、だからこそ (i) と (ii) の下からの評価が重要なのである。

STEP のその先へ

これはフーリエ（Fourier）による e が無理数であることの古典的な証明を、$\mathrm{e}^2 = p/q$ を $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$ と分けて両方の級数が速く収束するようにすることで拡張したものである。同じ考え方をより丁寧に用いると、0 でないすべての有理数 r に対して e^r が無理数であることが示せる。また、リウヴィル（Liouville）はこれを用いて、e が整数係数のどの 2 次方程式の解にもならないことを示した。級数の裾を評価することは大学 1 年次の解析学（analysis）の中核をなす技法である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。