解答例

STEP III 2024、第 6 問

純粋数学 • 線形微分方程式

STEP III 2024、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

制御（control）u はすべての方程式に等しく加えられているので、係数の和が 0 になる座標の一次結合（linear combination）は u の影響をまったく受けない。その一次結合をうまく選べば、その導関数がそれ自身の定数倍になり、u がどうであれ指数関数的（exponentially）に増大または減衰する。指数関数は初期値が 0 でない限り決して 0 にならず、ここから必要条件（necessary condition）が得られる。それらの条件が成り立てば、運動はただ一つの一階微分方程式（first-order differential equation）に帰着し、定数の u を用いて解くことができる。

解答

小問 (i)

(a) 二つの方程式の差をとると、u の項が打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

よって $w = x - y$ は $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$ を満たし、任意の関数 u に対して

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

が成り立つ。粒子がある時刻 $t > 0$ に原点にあるならば、そこで $x - y = 0$ である。$\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$ であるから、$x_0 - y_0 = 0$、すなわち $x_0 = y_0$ でなければならない。

(b) $x_0 = y_0$ のとき、(a) の式から**すべての** t に対して $x - y = 0$ となるので、粒子は直

線 $y = x$ 上にとどまる。第一の方程式に $y = x$ を代入すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

u が定数ならば、これは定数係数の線形微分方程式（linear equation with constant coefficients）である。特殊解（particular solution）は定数 $-\frac{1}{2}u$ であるから

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

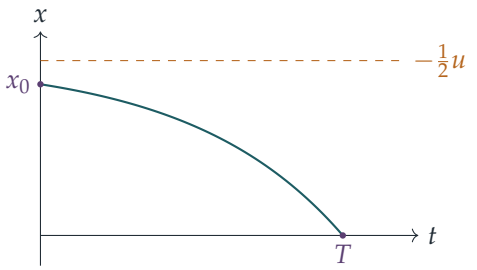
$x(T) = 0$ となればよい（このとき $y(T) = x(T) = 0$ も成り立つ）：

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad \Longrightarrow \quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

$T > 0$ より $\mathrm{e}^{2T} \neq 1$ であるから、両辺を割ることができて

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

符号は理にかなっている。何もしなければ $\dot{x} = 2x$ によって粒子は原点から遠ざけられるので、u は x_0 と逆向きに押さなければならない。（$x_0 = 0$ ならば、粒子は $u = 0$ のもとですでに原点に静止している。）



図は $x_0 = 1$、$T = 1$ の場合である。粒子は不安定な平衡点（unstable equilibrium）$x = -\frac{1}{2}u$ のわずかに下から出発し、そこから遠ざけられて、ちょうど時刻 T に原点に到達する。

小問 (ii)

(a) 小問 (i) にならい、$a + b + c = 0$（これにより u が打ち消される）を満たし、導関数がそれ自身の定数倍となる $ax + by + cz$ を探す。「x、次に $-2y$、次に z」というパターンから $w = x - 2y + z$ が思い浮かぶ：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

したがって、u がどうであれ $x-2y+z=(x_0-2y_0+z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$ である。原点では $w=0$ であり、$\mathrm{e}^{-t}\neq 0$ であるから $x_0-2y_0+z_0=0$ となる。すなわち $y_0=\frac{1}{2}(x_0+z_0)$ であり、y_0 は x_0 と z_0 の平均である。

考えてみよう u の影響を受けない一次結合がもう一つないだろうか？

後の二つの方程式はどちらも $x+u$ を含むので、差をとると u だけでなく x も消える。$v=y-z$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(x-2z+u)-(x-2y+u)=2(y-z)=2v,$$

よって $y-z=(y_0-z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$ である。

(b) 粒子がある時刻 $t>0$ に原点にあるならば、そこで $v=0$ である。$\mathrm{e}^{2t}\neq 0$ であるから $y_0=z_0$ を得る。これを (a) と合わせると $x_0=2y_0-z_0=y_0$ となるので、$x_0=y_0=z_0$ である。

(c) $x_0=y_0=z_0$ のとき、w と v はともに 0 から出発するので、すべての t に対して 0 のままである。よって $y=z$ であり、さらに $x=2y-z=y$ となる。粒子は直線 $x=y=z$ 上を動き、各方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4x-5x+u=-x+u$$

となる（第二式と第三式からも $x-2x+u$ となり、同じである）。u が定数ならば

$$x=u+(x_0-u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

$x(T)=0$ とおくと $u\left(1-\mathrm{e}^{-T}\right)=-x_0\,\mathrm{e}^{-T}$ を得る。$T>0$ より割ることができ、分子と分母に e^{T} を掛けて

$$\boxed{u=-\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T}-1}}$$

この場合、制御なしの運動 $\dot{x}=-x$ はもともと原点に向かって減衰するが、原点に達するのは $t\to\infty$ のときに限られる。原点に向かう小さな後押し（$T\to\infty$ のとき 0 に近づく）によって、粒子は有限時間で原点に到達する。

検算

- 極限：$T\to\infty$ のとき、(ii)(c) の答えは 0 に近づき、自然な減衰と一致する。一方、(i)(b) の答えは $-2x_0$ に近づき、このとき $x_0=-\frac{1}{2}u$ が平衡点となる。粒子はそこにとどまって決して原点に到達しないので、有限の T では u の大きさをわずかに大きくする必要があるのである。$T\to 0^{+}$ のときは、当然ながらどちらの答えも発散する。

- 数値計算：$x_0 = 1$、$T = 1$ のとき、小問 (i)(b) から $u \approx -2.3130$ が得られ、方程式を数値的に時間発展させると、$t = 1$ で誤差 10^{-8} 以内で $(0, 0)$ に到達する。(ii)(c) についても $u = -1/(\mathrm{e} - 1) \approx -0.5820$ で同様である。また、u を時間の定数でない関数としたときも、不変量（invariant）$x - y$、$x - 2y + z$、$y - z$ がそれぞれの指数関数に従うことを確認した。

よくある間違い

- (i)(a) や (ii)(a)、(b) で u を定数と仮定してしまうこと。これらの小問は**任意の** u についてのものであり、u が打ち消されることこそが要点である。
- (i)(b) と (ii)(c) で、すべての時刻で $y = x$（あるいは $x = y = z$）となる**理由**を述べ忘れること。これは初期値が 0 の場合の指数関数の式から従う。

STEP のその先へ

これは**制御理論**（control theory）の最初の一歩である。系を $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$ と書くと、ここで見つけた一次結合は $\mathbf{b}$ に直交する（orthogonal）A の左固有ベクトル（left eigenvector）であり、どのような制御もそれらに影響を与えることはできない。すべての状態を原点へ導けるかどうかは、カルマン（Kalman）の階数条件（rank condition）によって判定される。ここではその条件が成り立たず、まさにそれゆえに特別な初期点しかうまくいかないのである。固有ベクトルの側面については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）が、常微分方程式（ODE）の線形系については Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）が詳しい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。