解答例

STEP III 2024、第 5 問

純粋数学 ・ 行列微分方程式

> **STEP III 2024、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.7 節「**決して変わらない量**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/lax-pairs.html

鍵となる考え方

すべてはトレース（trace）に関する二つの事実にかかっている。トレースは線形（linear）であり、$\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$ が成り立つ。小問 (ii) は行列式（determinant）の変化率を与える公式（ヤコビ（Jacobi）の公式）であり、「$\det \mathbf{M}$ は一定か？」という問いを「あるトレースは 0 か？」という問いに置き換える。(iii) では、交換子（commutator）$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ のトレースはつねに 0 であり、これから三つの不変量（invariant）がすべて得られる。(iv) では、同じ公式から $\operatorname{tr} \mathbf{N}$ が $\ln|\det \mathbf{M}|$ の変化の速さを測ることがわかるので、問題は「トレースが一定でありながら行列式が変化する行列は存在するか」ということになる。

解答

小問 (i)

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{MN}$ の対角成分（diagonal entries）は $ap + br$ と $cq + ds$ であり、$\mathbf{NM}$ の対角成分は $pa + qc$ と $rb + sd$ である。よって

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

また、$\mathbf{M}+\mathbf{N}$ の対角成分は $a+p$ と $d+s$ であるから

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}+\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

同様に、スカラー（scalar）k に対して $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$ であり、$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ のトレースは $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ の導関数である。以下ではこれらを断りなく用いる。

小問 (ii)

成分 a, b, c, d は t に依存するとする（ダッシュは $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す）。積の微分法則（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad-bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

$\mathbf{M}$ は正則（non-singular）であるから $\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であり、

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da'-bc' & * \\ * & -cb'+ad' \end{pmatrix}.$$

このトレースは $\dfrac{a'd+ad'-b'c-bc'}{\det\mathbf{M}}$ であり、これは $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$ に等しい。以上で示された。

小問 (iii)

行列式。(ii) とトレースの線形性により

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

二つの行列 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ と $\mathbf{M}$ に (i) を用いると、$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$ を得る。よって右辺は 0 である。$\det\mathbf{M} \neq 0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$ が得られる。

トレース。(i) により $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\Big(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\Big) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$ である。

2 乗のトレース。因子の順序を保つ限り、積の微分法則は行列に対しても成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

ここで二つの $\mathbf{MNM}$ の項が打ち消し合うことを用いた。これは $\mathbf{M}$ の代わりに $\mathbf{M}^2$ とした同じ交換子の形であるから、(i) によりそのトレースは 0 である。したがって $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$ も一定である。三つの量はいずれも t によらない。

考えてみよう $\mathbf{N}$ も t に依存するとき、$\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ はどのように解けばよいか？

$\mathbf{N}$ のうち、あらゆる行列と可換な部分を切り離す。$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$ と書く。単位行列は $\mathbf{M}$ と可換であるから、$\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{MJ} - \mathbf{JM})$ となる。$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$\mathbf{MJ} - \mathbf{JM} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

成分を比較すると、四つのスカラーの方程式が得られる。

$$a' = -tc, \qquad b' = t(a-d), \qquad c' = 0, \qquad d' = tc.$$

$t = 0$ における値を A, B, C, D として、これらを順に解く。

- $c' = 0$ より $c = C$ である。
- すると $a' = -Ct$、$d' = Ct$ であるから、$a = A - \frac{1}{2}Ct^2$、$d = D + \frac{1}{2}Ct^2$ となる。
- このとき $a - d = A - D - Ct^2$ であるから $b' = (A-D)t - Ct^3$ となり、$b = B + \frac{1}{2}(A-D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$ を得る。

したがって

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A-D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}.$$

検算として、トレースは $A + D$ であり、$ad - bc$ を展開すると t のべきはすべて打ち消し合って $AD - BC$ が残る。これはこの小問の前半の結果と一致する。

小問 (iv)

今度は $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN}$ であるから $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{N}$ であり、(ii) より

$$\mathrm{tr}(\mathbf{N}) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det \mathbf{M}).$$

よって、すべての t で $\mathrm{tr}\,\mathbf{N} = 0$ となるのは、$\det \mathbf{M}$ が一定であるときに限る。トレースが一定であることは行列式について何も述べていないので、答えは**否**であるはずだ。これを証明するには反例（counterexample）を一つ挙げればよい。

考えてみよう 問題が $\mathbf{N}$ を微分方程式を通してしか与えていないとき、反例はどのように作ればよいか？

逆向きに考える。トレースが 0 でない一定値で、行列式が一定でない正則行列 $\mathbf{M}(t)$ を任意に選び、$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ と**定義**する。すると方程式は自動的に成り立つ。そこで

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = 2, \qquad \det\mathbf{M} = 1 + t^2 \neq 0.$$

とする。すると

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$$

実際に掛け算すると、$\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ であることが確かめられる。また $\det\mathbf{N} = 1/(1+t^2)$ であるから、$\mathbf{N}$ は正則である。ところが

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

であり、これは $t \neq 0$ であるすべての t に対して 0 でない。よって、$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$ は必ずしも成り立つ**とは限らない**。必ず成り立つ**のは** $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$ であり、これは別のことである。

検算

- (iii) で $A = 1$、$B = 0$、$C = 2$、$D = 3$、$t = 1$ とする。公式から $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ となり、そのトレースは 4、行列式は 3 で、$t = 0$ のときと同じである。その 2 乗のトレースは $0 - 3 - 3 + 16 = 10$ であり、初期の行列についても $1 + 0 + 0 + 9 = 10$ となる。
- (iii) の $\mathbf{M}$ の公式は、ランダムな A, B, C, D に対して微分方程式を計算機で数値積分した結果と小数第 8 位まで一致した。時間に依存するランダムな $\mathbf{N}$ を用いて同じ数値積分を行ったときも、三つの不変量は一定に保たれた。
- (iv) で $t = 1$ のとき $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、そのトレースは 1 である。一方 $\det\mathbf{M} = 1 + t^2$ の対数微分（logarithmic derivative）はそこで $2t/(1+t^2) = 1$ であり、(ii) の予測どおりである。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ と書いてしまうこと。行列は可換とは限らないので、両方の順序を残さなければならない。

- $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}\mathbf{M}\operatorname{tr}\mathbf{N}$ と思い込むこと。これは誤りである。成り立つのは線形性と巡回性（cyclic rule）だけである。
- (iv) で $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = 0$ から直ちに $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$ を導いてしまうこと。「否」と答えるには具体的な反例が必要である。

STEP のその先へ

小問 (ii) はヤコビの公式の 2×2 の場合であり、この公式は $n \times n$ 行列に対しても成り立つ。$\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$ と組み合わせると $\det\mathbf{M}(t) = \det\mathbf{M}(0)\exp\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{N}$ が得られる。$\mathbf{N}$ が定数行列のとき、これは有名な恒等式 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{N}}$ となる。$\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ の形の方程式はラックス方程式（Lax equations）とよばれる。量 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k)$ はつねに保存され、そのためこれらは可積分系（integrable systems）の理論に現れる。トレース、行列式、行列指数関数（matrix exponential）について学ぶには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。