解答例

STEP III 2024、第 4 問

純粋数学 • 放物線の接線

> **STEP III 2024、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては 2 直線のなす角の tan を与える公式にかかっている。これは $\tan(A-B)$ の公式を言い換えたものにすぎない。$x=p$ と $x=q$ における接線（tangent）が点 (X,Y) で交わり、$p+q$ と pq が X と Y で表されることがわかれば、角についての条件は $(p-q)^2$ と pq を含むので、X と Y だけで書き直すことができる。その書き直した条件が軌跡（locus）である。

解答

小問 (i)

2 直線が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α、β とすると、$m_1=\tan\alpha$、$m_2=\tan\beta$ である（どちらの直線も傾き（gradient）をもつので、いずれも鉛直ではない）。2 直線のなす角は、符号と 180° の整数倍の差を除いて $\alpha-\beta$ である。2 直線のなす鋭角（acute angle）が 45° ならば、$\alpha-\beta$ は $\pm45^\circ$ に 180° の整数倍を加えたものであり、tan は周期（period）180° をもつから、

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

特に $\cos(\alpha-\beta)\neq0$ であるから、加法定理（compound-angle formula）が適用でき、$1+m_1m_2\neq0$ である：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

よって $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm 1$ となり、示すべきことが示された。より一般に、2 直線のなす鋭角 θ は $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ を満たす。これは小問 (iii) で用いる。

小問 (ii)

C 上では $y = \dfrac{x^2}{4a}$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{2a}$ である。$\left(p, \frac{p^2}{4a}\right)$ における接線は

$$y - \frac{p^2}{4a} = \frac{p}{2a}(x - p) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{p}{2a}x - \frac{p^2}{4a},$$

であり、同様に $x = q$ における接線は $y = \dfrac{q}{2a}x - \dfrac{q^2}{4a}$ である。辺々引くと、

$$\frac{p - q}{2a}\,x = \frac{p^2 - q^2}{4a} = \frac{(p - q)(p + q)}{4a}.$$

$p \neq q$ であるから $p - q$ で割ることができ、$x = \frac{1}{2}(p + q)$ を得る。これが示すべきことであった。これを 1 本目の接線の式に代入すると、

$$y = \frac{p(p + q)}{4a} - \frac{p^2}{4a} = \frac{pq}{4a}.$$

したがって 2 本の接線は

$$(X, Y) = \left(\tfrac{1}{2}(p + q),\ \frac{pq}{4a}\right), \qquad \text{よって} \qquad p + q = 2X, \quad pq = 4aY. \qquad (*)$$

で交わる。

次に、$x = p$ と $x = q$ における接線のなす角が 45° であるとする。このとき 2 本の接線は明らかに異なる直線であるから、$p \neq q$ であり、$(*)$ が成り立つ。傾きは $m_1 = \frac{p}{2a}$、$m_2 = \frac{q}{2a}$ であるから、

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(p - q)/(2a)}{1 + pq/(4a^2)} = \frac{2a(p - q)}{4a^2 + pq}.$$

小問 (i) よりこれは ± 1 に等しい。2 乗すれば符号が消える：

$$4a^2(p - q)^2 = (4a^2 + pq)^2.$$

> ? **考えてみよう** 条件に含まれるのが $p + q$ ではなく $p - q$ であるとき、どうすれば p と q を消去できるだろうか。

$(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ を用いる。これは対称式（symmetric expression）であるから、$(*)$ が使える：

$$(p - q)^2 = 4X^2 - 16aY, \qquad 4a^2 + pq = 4a^2 + 4aY = 4a(a + Y).$$

条件は

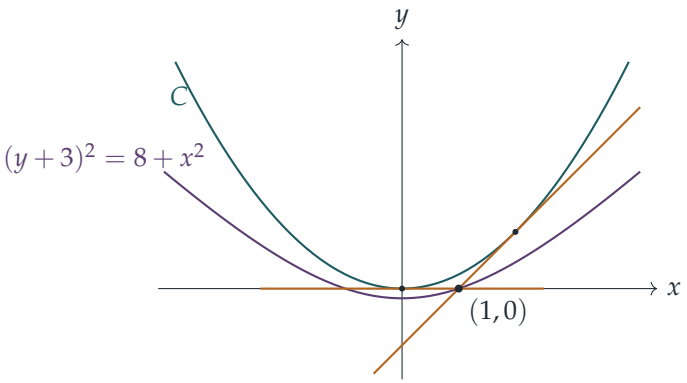
$$4a^2(4X^2-16aY)=16a^2(a+Y)^2.$$

となる。$16a^2$ で割ると（$a\neq 0$ であるから割ってよい）、

$$X^2-4aY=Y^2+2aY+a^2,$$

$$\text{よって}\qquad X^2+8a^2=Y^2+6aY+9a^2=(Y+3a)^2.$$

したがって交点は $(y+3a)^2=8a^2+x^2$ 上にあり、示すべきことが示された。



$a=1$ のとき：$x=2$ における接線（傾き 1）と $x=0$ における接線（傾き 0）のなす角は 45° であり、2 本は $(1,0)$ で交わる。この点は双曲線（hyperbola）の上側の枝の上にある。

小問 (iii)

(X,Y) を $(y+7a)^2=48a^2+3x^2$ 上の点で、C の 2 本の接線（$x=p$ と $x=q$ における接線、ただし $p\neq q$）が交わる点とする。このとき $(*)$ が成り立つ。小問 (i) の最後の注意により、2 本の接線のなす鋭角 θ は

$$\tan^2\theta=\left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2=\frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2}=\frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

を満たす。ここでは小問 (ii) と同じ置き換えを用いた。（$Y=-a$ ならば 2 本の接線は直交することになるが、この曲線上ではそれが起こりえないことを以下で示す。）

考えてみよう X^2-4aY を扱うのに、曲線の方程式はどのように役立つだろうか。

曲線の方程式を展開すると $Y^2+14aY+49a^2=48a^2+3X^2$、すなわち

$$3X^2=Y^2+14aY+a^2.$$

である。すると

$$3(X^2-4aY)=Y^2+14aY+a^2-12aY=Y^2+2aY+a^2=(Y+a)^2.$$

ここから 2 つのことが従う。第一に、$Y\neq -a$ である。もし $Y=-a$ ならば $X^2-4aY=0$、すなわち $X^2=-4a^2$ となるが、$a\neq 0$ であるからこれは不可能である。よって $X^2-4aY=\frac{1}{3}(Y+a)^2>0$ であり、これにより点が C の外側にあることも確かめられる。実際、p と q を解とする 2 次方程式 $t^2-2Xt+4aY=0$ は異なる 2 つの実数解をもつので、この曲線上のどの点を通る接線もたしかに 2 本存在する。第二に、

$$\tan^2\theta=\frac{\frac{1}{3}(Y+a)^2}{(Y+a)^2}=\frac{1}{3}.$$

したがって点が曲線上のどこにあっても $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。すなわち、2 本の接線のなす鋭角は一定であり、30° に等しい。

検算

- $a=1$ のとき、$x=2$ と $x=0$ における接線は $y=x-1$ と $y=0$ であり、なす角は 45° である。2 本は $(1,0)$ で交わり、$(0+3)^2=9=8+1^2$ が成り立つ。
- 小問 (iii) で $a=1$ とし、$X=0$ をとる。すると $(Y+7)^2=48$ であるから、$Y=4\sqrt{3}-7\approx -0.072$ である。$(0,Y)$ を通る接線は $x=\pm\sqrt{-4Y}\approx\pm 0.536$ で接し、傾きは ± 0.268 である。$\tan 15^\circ\approx 0.268$ であるから、それぞれの接線は水平方向と 15° の角をなし、2 本のなす角は 30° である。
- a の値を無作為に 1000 通り選び、それぞれの双曲線の両方の枝の上の点についてコンピュータで確かめたところ、45° と 30° の結果が確認された。

よくある間違い

- p と q を個別に求めようとすること。必要なのは対称な組み合わせ $p+q$ と pq だけであり、$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$ を用いればよい。
- 小問 (i) で $\pm$ を忘れること。条件を 2 乗すると 45° の角の両方の向きが保たれ、それによって 1 つの方程式にまとまるのである。
- 小問 (iii) で、約分する前に $Y+a\neq 0$ を確かめないこと。

STEP のその先へ

点 (X, Y) から放物線（parabola）に引いた接線は 2 次方程式 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ によって決まり、接線が一定の角で交わる点の軌跡はつねに双曲線になる（90° の場合は退化して準線（directrix）$y = -a$ となる）。これらの考え方は射影幾何学（projective geometry）に属し、そこでは極と極線の関係（pole–polar relation）が点とその接点弦（chord of contact）を結びつける。この種の問題をさらに、取り組み方の解説とともに知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。