解答例

STEP III 2024、第 3 問

純粋数学 • 単調関数と導関数

STEP III 2024、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの導関数（derivative）にかかっている。g を微分して通分すると、分子は x の**一次式**にまで簡単になるので、その符号は容易に読み取れる。小問 (iii) とのつながりは、g がちょうど $\ln f$ の導関数になっていることである。したがって、(ii) のグラフで目に見える形になる g の符号が、f が増加するか減少するかを決める。

解答

小問 (i)

$x > 0$ であるから、$\ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(x+1) - \ln x$ と書ける。すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

となり、また分母を x^2+x として商の微分法（quotient rule）を用いると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x} = \frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

である。差をとると x^2 の項は打ち消し合う：

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

分母は正であるから、$\mathrm{g}'(x)$ の符号は $N(x) = (2c-1)x+c$ の符号と一致する。

(a) $c \geq \frac{1}{2}$ ならば $(2c-1)x \geq 0$ かつ $c \geq \frac{1}{2} > 0$ であるから、すべての $x > 0$ に対して $N(x) > 0$ である。したがって、すべての $x > 0$ で傾き（gradient）は正である。

(b) $0 \le c < \frac{1}{2}$ ならば $1-2c>0$ であり、

$$N(x)<0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

よって傾きが負になるのは、ちょうど $x > \dfrac{c}{1-2c}$ のときである。($c=0$ のときは、これはすべての $x>0$ である。) $x_0 = \dfrac{c}{1-2c}$ とおく。$c>0$ のとき、g は $(0, x_0]$ で増加し、$[x_0, \infty)$ で減少する。

小問 (ii)

x が大きいときの振る舞いも調べる必要がある。g の二つの項はどちらも 0 に近づくので $\mathrm{g}(x) \to 0$ となるが、グラフにはどちら側から近づくかも示すべきである。$t = \frac{1}{x}$ として $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$ を用い、さらに $\dfrac{x+c}{x(x+1)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c-1}{x^2} + \cdots$ を用いると、

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{十分大きい} x.$$

を得る。

> **考えてみよう** g が増加して 0 に近づくならば、グラフは軸のどちら側になければならないか？

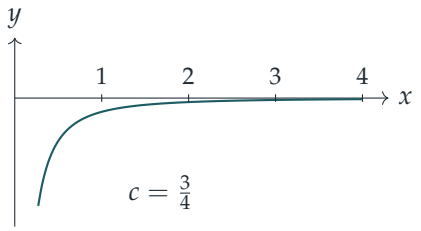
下側でなければならない。g が狭義単調増加（strictly increasing）ならば、任意の x に対して、$y > x$ であるすべての y について $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(y)$ であり、$y \to \infty$ とすると $\mathrm{g}(x) < 0$ が得られる（$\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x+1) \le 0$ であるから不等号は厳密である）。同様に、狭義単調減少で 0 に近づく関数は正である。

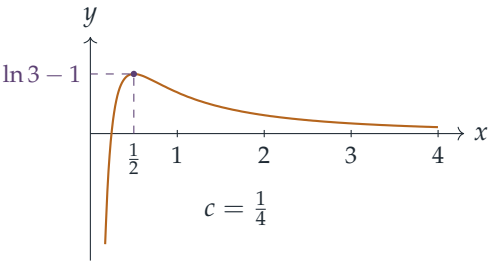
(a) $c = \frac{3}{4}$. (i)(a) より、g は全域で増加する。($x \to 0$ のとき) $-\infty$ から 0 に向かって上昇し、軸の下側にとどまる。$-\frac{1}{4x^2}$ のように近づくので、軸と交わることはなく、極値点（turning point）もない。例えば $\mathrm{g}(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$ である。

(b) $c = \frac{1}{4}$. このとき $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$ である。曲線は $-\infty$ から上昇し、$x = \frac{1}{2}$ で最大値をとる。そこでは

$$\mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

である。その後は $\frac{1}{4x^2}$ のように、上側から 0 に向かって減少する。$[\frac{1}{2}, \infty)$ では 0 に向かって減少するので、そこでは正である。$(0, \frac{1}{2})$ では $-\infty$ から正の値まで増加するので、軸とちょうど一度、$\frac{1}{4}$ より少し小さい点（数値的には $x \approx 0.243$）で交わる。





（縦方向の目盛りは異なる。右側のグラフは、小さな正のこぶが見えるように縦に引き伸ばしてある。どちらのグラフでも y 軸は漸近線（asymptote）である。）

小問 (iii)

$x > 0$ に対して $\mathrm{f}(x) > 0$ であるから、対数をとることができる：

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x + c) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

積の微分法（product rule）で微分し、(i) で求めた導関数を用いると

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x + c) \cdot \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

となる。よって $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$ であり、$\mathrm{f}(x) > 0$ であるから f' は g と同じ符号をもつ。また、その二つの項はどちらも 0 に近づくので、すべての c に対して $x \to \infty$ のとき $\mathrm{g}(x) \to 0$ となることにも注意する。

(a) $c \geq \frac{1}{2}$**.** (i)(a) より、g は $x > 0$ で狭義単調増加であり、0 に近づく。(ii) の枠のあとの議論により、すべての $x > 0$ に対して $\mathrm{g}(x) < 0$ である。したがって $\mathrm{f}'(x) < 0$ であり、f は減少する。

(b) $0 < c < \frac{1}{2}$**.** (i)(b) より、g は $[x_0, \infty)$ で狭義単調減少であり 0 に近づくので、そこでは $\mathrm{g} > 0$ である。特に $\mathrm{g}(x_0) > 0$ である。$(0, x_0]$ では g は連続かつ狭義単調増加であり、$x \to 0$ のとき $\mathrm{g}(x) \to -\infty$ である（$c > 0$ なので、これは問題文で与えられている）。したがって、ちょうど一点 $x_1 \in (0, x_0)$ で値 0 をとり、$(0, x_1)$ で $\mathrm{g} < 0$、(x_1, ∞) で $\mathrm{g} > 0$ となる。よって $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ であり、そこで f' の符号は負から正に変わる。したがって f は x_1 で極値点（極小点）をもつ。

考えてみよう なぜ $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ だけでは不十分なのか？

停留点（stationary point）は必ずしも極値点ではない（原点における $y = x^3$ を考えよ）。x_1 を極値点にしているのは f' の符号の変化であり、それこそが g の形からわかることである。

(c) $c = 0$. このとき、すべての $x > 0$ に対して $g'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$ であるから、g は狭義単調減少であり 0 に近づく。したがって、すべての $x > 0$ に対して $g(x) > 0$ であり、$f'(x) > 0$ となるので、$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は増加する。

検算

- ある点、例えば $x = 1$、$c = \frac{1}{4}$ で g を数値的に微分してみる。公式からは $g'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$ が得られ、これは差分商と一致する。
- $c = \frac{1}{4}$：$g(0.2) \approx -0.083$、$g(0.3) \approx 0.056$ であり、0.243 付近でただ一度交わることと整合する。$c = \frac{3}{4}$ では $g(3) \approx -0.025$ であり、まだ軸のわずかに下にある。
- $c = \frac{1}{4}$ の場合の (iii)(b) では、f の最小値は同じ $x \approx 0.243$ でとられる。また、$(0, \frac{1}{2})$ に属するいくつかの c の値について、細かい格子点上で f をコンピュータで調べると、極値点はちょうど一つ見つかる。
- $c = 0$ のとき $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ は増加して e に近づき、$c = 1$ のとき $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ は減少して e に近づく。これは e を挟み込む、おなじみの二つの数列である。

よくある間違い

- 「g は増加する」ことだけから $g < 0$ と結論してしまう。$x \to \infty$ のとき $g \to 0$ という極限も必要である。
- (ii)(b) で、曲線を常に負であるように描いてしまう。最大値 $\ln 3 - 1$ は小さいが正であるから、曲線は軸と交わり、上側から再び軸に近づかなければならない。
- 指数が定数であるかのように $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$ を微分してしまう。まず対数をとること。

STEP のその先へ

$(1 + \frac{1}{x})^x$ が増加し、$(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ が減少して、どちらも e に近づくという事実は、e を定義する極限が存在することを示す、大学一年次の古典的な方法である。これは単調収束定理（monotone convergence theorem）の一例である。この問題は、振る舞いが切り替わるちょうどの境目 $c = \frac{1}{2}$ を見つけており、展開 $g(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$ がその理由を説明している。単調数列と極限についてさらに学ぶには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。