解答例

STEP III 2024、第 2 問

純粋数学 • 不等式と絶対値

STEP III 2024、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで平方根の中に現れる式はどれも常に正の値をとる二次式（quadratic）であり、各不等式の両辺はともに非負である。したがって、解集合（solution set）を変えずに両辺を 2 乗してよい。2 乗すると、どの問題も二次式の符号（あるいは x^2 の項が打ち消し合う場合には一次関数（linear function）の符号）に関する主張に帰着する。幾何的には、$y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$ は双曲線（hyperbola）の上半分であり、問題に登場する直線はその弦（chord）や漸近線（asymptote）である。

解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）すると $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$ となるので、平方根はすべての x に対して定義される。各不等式の両辺は非負であり、$A, B \geq 0$ のとき $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$ が成り立つ。

(a) 両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ または } x \geq 8. \end{aligned}$$

いずれの場合も、等号は $x = 0$（すべての辺が 8 に等しい）と $x = 8$（すべての辺が 16 に等しい）で成り立つ。

小問 (ii)

(a) 平方の差（difference of two squares）を用いると、

$$\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)\right) f(x) = (4x^2 - 8x + 64) - 4(x-1)^2 = 60.$$

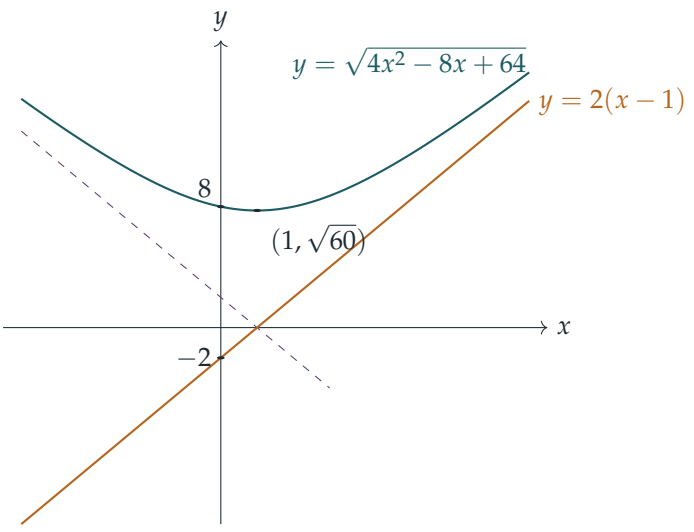
$x > 1$ のとき括弧内は正なので、これで割ってよい：

$$f(x) = \frac{60}{\sqrt{4x^2 - 8x + 64} + 2(x-1)}.$$

$x \to \infty$ のとき、分母は $2(x-1)$ 以上であり、これは無限大に発散するので、求めるとおり $f(x) \to 0$ となる。

(b) $y = \sqrt{4(x-1)^2 + 60}$ とおく。すると $y > 0$ かつ $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$ であるから、この曲線は $(1, 0)$ を中心とする双曲線の上側の枝である。曲線は $x = 1$ に関して対称であり、$x = 1$ で最小値 $\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$ をとり、y 軸と $(0, 8)$ で交わる。

$y > \sqrt{4(x-1)^2} = 2|x-1|$ であるから、曲線は 2 直線 $y = \pm 2(x-1)$ のどちらよりも真に上側にある。小問 (a) より、$x \to \infty$ のとき曲線は $y = 2(x-1)$ に近づく。$x = 1$ に関する対称性により、$x \to -\infty$ のとき曲線は $y = -2(x-1)$ に近づく。直線 $y = 2(x-1)$ は傾き 2 で、$(1, 0)$ と $(0, -2)$ を通る。



破線はもう一方の漸近線 $y = -2(x-1)$ である。

小問 (iii)

ここでも $4x^2-5x+4=4(x-\frac{5}{8})^2+\frac{39}{16}>0$ であるから、平方根は常に定義される。(非負である) 両辺を 2 乗すると、不等式は次と同値になる。

$$(m^2-4)x^2+(2mc+5)x+(c^2-4)\geq 0. \qquad (*)$$

考えてみよう $(*)$ の左辺がちょうど $x\geq 3$ のときに限って非負となるのは、どのような種類の式だろうか。

$m^2-4>0$ ならば、$x\to-\infty$ のとき左辺は $+\infty$ に発散するので、絶対値の大きな負の x が $(*)$ を満たしてしまう。$m^2-4<0$ ならば、$x\to+\infty$ のとき左辺は $-\infty$ に発散するので、大きな x が条件を満たさなくなる。どちらも許されないので $m^2=4$ であり、$(*)$ は一次不等式になる。一次不等式 $ax+b\geq 0$ の解集合が $\{x:x\geq 3\}$ となるのは、$a>0$ かつ $3a+b=0$ のとき、かつそのときに限る。

$m=2$ とする。すると $a=4c+5$、$b=c^2-4$ であるから、次が必要である。

$$3(4c+5)+c^2-4=c^2+12c+11=(c+1)(c+11)=0, \qquad 4c+5>0.$$

解 $c=-11$ は $a=-39<0$ を与えるので不適である。解 $c=-1$ は $a=1>0$ を与える。よって

$$m=2, \qquad c=-1$$

が条件を満たす。確認のため計算すると $(2x-1)^2-(4x^2-5x+4)=x-3$ であり、これはちょうど $x\geq 3$ のときに限って非負である。($m=-2$、$c=1$ としても同じ $|mx+c|$ が得られ、同様に正しい。)

小問 (iv)

$g(x)=x^2+px+q$、$L(x)=mx+c$ とおく。$|g|\leq L \iff -L\leq g\leq L$ であるから、不等式が成り立つのは次の両方が成り立つとき、かつそのときに限る。

$$g(x)-L(x)\leq 0 \qquad \text{かつ} \qquad g(x)+L(x)\geq 0.$$

$g-L$ と $g+L$ はどちらも最高次の係数が 1 の二次式である。

- $g-L\leq 0$ となる集合は閉区間 $[a,b]$ である (空集合や 1 点である場合もある)。
- $g+L\geq 0$ となる集合は、全体から開区間 (r,s) を除いたものである。$g+L$ が実数解をもたなければ、何も除かれない。

したがって解集合は、$[a,b]$ から (r,s) を除いたものである。これが $[-5,1]\cup[5,7]$ となるためには、$a=-5$、$b=7$ (外側の端点) でなければならず、除かれる隙間はちょう

ど $(1,5)$ でなければならないので、$r=1$、$s=5$ である。よって

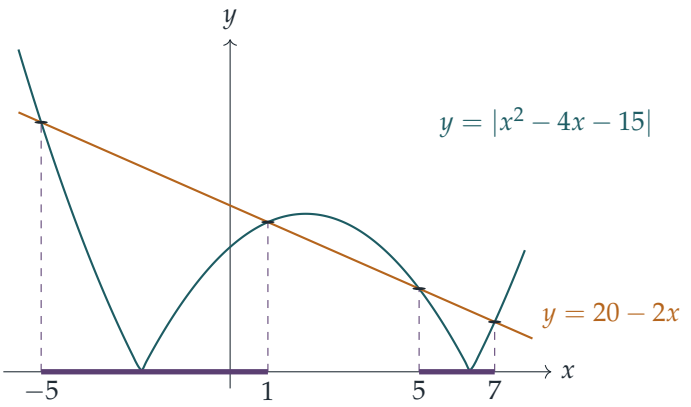
$$g(x)-L(x)=(x+5)(x-7)=x^2-2x-35,$$
$$g(x)+L(x)=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5.$$

両式を足して 2 で割ると $g(x)=x^2-4x-15$ が得られる。引いて 2 で割ると $L(x)=-2x+20$ が得られる。したがって

$$p=-4,\qquad q=-15,\qquad m=-2,\qquad c=20.$$

以上の各段階はすべて逆にたどれるので、これらの値に対して解集合は確かに $[-5,1]\cup[5,7]$ となる。実際、必要なのは $(x+5)(x-7)\le 0$ かつ $(x-1)(x-5)\ge 0$ である。また、条件を満たす値はこれらに限られる。

図において、g の根は $2\pm\sqrt{19}\approx -2.36,\ 6.36$ である。直線 $y=20-2x$ は $|g|$ の外側の腕と $x=-5$ および $x=7$ で交わり、折り返された山の部分を $x=1$ と $x=5$ で横切る。



検算

- (ii)(a) において、$x=100$ とすると $f(100)=\sqrt{39264}-198\approx 0.151$ となり、$60/(\sqrt{39264}+198)\approx 0.151$ と一致する。
- (iv) において、$x=0$ のとき $|-15|=15\le 20$ なので、0 は解である。$x=3$ のとき $|9-12-15|=18>14$ なので、3 は解でない。$x=8$ のとき $|64-32-15|=17>4$ なので、8 は解でない。これらは $[-5,1]\cup[5,7]$ と一致する。細かい格子上の x についてコンピュータで確認したところ、4 つの解集合すべてが正しいことが確かめられた。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに 2 乗してしまうこと。ここで 2 乗が正当なのは、両辺がともに非負だからにほかならない。
- (iii) において、本当の二次式のまま残してしまうこと。二次不等式の解集合が片側に伸びる半直線になることは決してないので、x^2 の項は打ち消し合わなければならない。
- (iv) において、端点の組み合わせを誤ること。外側の端点 $-5,7$ は $g-L$ に、内側の端点 $1,5$（隙間）は $g+L$ に対応する。

STEP のその先へ

曲線 $y^2-4(x-1)^2=60$ は双曲線であり、小問 (ii) は漸近線の求め方を示している。すなわち、曲線と候補となる直線との差を有理化（rationalise）するのである。「共役」（conjugate）を掛けるというこの同じ技法は、大学 1 年の解析学（analysis）における極限の標準的な道具である。(iv) のように $|g|\leq L$ を 2 つの片側条件に書き直すことは、解析学で絶対値（absolute value）を含む不等式を扱う際の常套手段である。次の一歩としては、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。