解答例

STEP III 2024、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 2024、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

単位正方形の中から一様に（uniformly）選んだ点について、$\mathrm{P}(R \le r)$ は、原点を中心とする半径 r の円の内側にある正方形の部分の面積にほかならない。$r > 1$ となると円は正方形の 2 辺からはみ出し、正方形の中に残る領域は、2 つの直角三角形（right-angled triangle）と 1 つの扇形（sector）にきれいに分かれる。期待値（expectation）を求めるには、微分して確率密度関数（density）を得てから $rf(r)$ を積分すればよい。部分積分（integration by parts）によって扱いにくい $\cos^{-1}$ の項が消え、双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）で計算が完了する。

解答

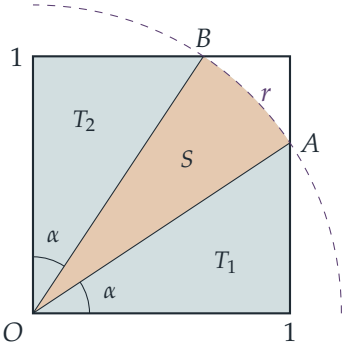
小問 (i)

確率は面積に等しいので、$\mathrm{P}(R \le r)$ は、正方形の点のうち O からの距離が r 以下であるものの集合の面積である。

$0 \le r \le 1$ のとき、四分円 $x, y \ge 0, x^2 + y^2 \le r^2$ は完全に正方形の内側にあるから、

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

$1 \le r \le \sqrt{2}$ のとき、円 $x^2 + y^2 = r^2$ は辺 $x = 1$ と $A = (1, \sqrt{r^2 - 1})$ で、辺 $y = 1$ と $B = (\sqrt{r^2 - 1}, 1)$ で交わる。$0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$ であるから、どちらの点も正方形の上にある。OA が x 軸となす角を α とすると $\cos\alpha = 1/r$、すなわち $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$ である。直線 $y = x$ に関する対称性から、OB も y 軸と同じ角 α をなす。



正方形のうち円の内側にある部分は、次のものからなる。

- 頂点 $O, (1,0), A$ をもつ三角形 T_1：$(1,0)$ で直角をなし、直角をはさむ 2 辺の長さは 1 と $\sqrt{r^2-1}$ であるから、面積は $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$ である。
- 頂点 $O, (0,1), B$ をもつ三角形 T_2：T_1 の鏡像であり、面積はやはり $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$ である。
- OA と OB の間にある半径 r の扇形 S：中心角は $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ であるから、面積は $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$ である。

これらを足し合わせると、

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

となり、求める結果が得られる。（$r=1$ ではどちらの式も $\frac{1}{4}\pi$ を与え、$r=\sqrt{2}$ では $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$ となって、あるべき値になっている。）

小問 (ii)

$F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$ とおき、確率密度関数を $f=F'$ とする。$0<r<1$ では $f(r)=\frac{1}{2}\pi r$ である。$1<r<\sqrt{2}$ では

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

が必要になる。ここで $r>0$ に対して $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$ を用いた。すると、積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

2 つの $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ の項が打ち消し合っており、これはよい兆候である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) &= \int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r - 2\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6} - 2I = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - 2I,\end{aligned}$$

ただし $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$ である。

考えてみよう I の中にある逆余弦（inverse cosine）をどうやって取り除けばよいか。

$\cos^{-1}(r^{-1})$ を微分し（その導関数が代数的であることは上で確かめた）、r^2 を積分する形で部分積分を行う。

$$\begin{aligned}I &= \left[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

ここで $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ と $\cos^{-1}1 = 0$ を用いた。（被積分関数は $r=1$ で非有界であるが、そこでは $1/\sqrt{2(r-1)}$ のようにふるまうので、積分は収束する。）したがって

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

となり、これが求める結果である。

小問 (iii)

$\sqrt{r^2-1}$ があることから $r = \cosh t$ とおくことが思いつく。このとき $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$、また（$t \geq 0$ であるから）$\sqrt{r^2-1} = \sinh t$ である。積分区間の端は $t=0$ と $t=T$ になる。ここで $\cosh T = \sqrt{2}$ であるから $\sinh T = 1$ であり、

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\bigl(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\bigr) = \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr).$$

すると

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\right]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}.\end{aligned}$$

これに $\frac{2}{3}$ を掛けて、

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Bigl(\sqrt{2} + \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr),$$

となり、求める結果が得られる。

検算

- F は $r = 1$ で連続であり（どちらの式も $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ を与える）、最も遠い角である $r = \sqrt{2}$ で 1 に達する。
- 確率密度関数 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$ は $r = \sqrt{2}$ で 0 になっており、そうでなければならない。それほど遠くにあるのは角のただ 1 点だけだからである。
- 数値的には $\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$ であり、$\frac{1}{2}$ と $\sqrt{2}$ の間という妥当な値である。4×10^5 個のランダムな点によるコンピュータ・シミュレーションでは平均距離は約 0.766 となり、その経験分布関数（empirical distribution function）は、いくつかの r の値において F と 0.002 以内で一致した。

よくある間違い

- 扇形の中心角を $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ではなく $\frac{\pi}{2} - \alpha$ としてしまう。2 辺の**それぞれ**で三角形が切り取られていることに注意。
- $\cos^{-1}(r^{-1})$ の導関数の符号を間違える。（$\cos^{-1}$ と r^{-1} から来る）2 つの負号は打ち消し合うので、導関数は正である。

STEP のその先へ

これは幾何確率（geometric probability）の入門である。ここで求めたのは、単位正方形の角から、その内部のランダムな点までの平均距離であった。これと対になる問題、すなわち単位正方形内の **2 つの**ランダムな点の間の平均距離にも、$\ln(1+\sqrt{2})$ を含む、似ているがより複雑な閉じた式がある。これは重積分（double integral）と変数変換（change of variables）の古典的な演習問題である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、幾何によって定まる分布や、分布関数（distribution function）から期待値を計算する方法が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。