解答例

STEP III 2024、第 11 問

確率・統計 ・ 二項分布の期待値

> **STEP III 2024、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

(i) の恒等式（identity）は、和の下半分にある各項 $r\binom{2n}{r}$ を上半分の項と対応させるものである。この対称性こそが X に必要なものである。表と裏の多い方の枚数は、表の枚数か裏の枚数のどちらかであり、表と裏の役割を入れ替えると、期待値（expectation）は和の上半分へと折り返される。その後、(iii) は比（ratio）を調べる問題であり、(iv) は一行で済む。

解答

小問 (i)

$1 \le r \le 2n$ のとき、r と $r!$ を約分すると

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)!\,(2n-r)!}.$$

一方、$2n-(2n+1-r) = r-1$ であるから

$$(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \frac{(2n+1-r)\,(2n)!}{(2n+1-r)!\,(r-1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,(r-1)!},$$

となる。ここでも分子の因数を階乗と約分した。（$2n+1-r$ が 1 から $2n$ の間にあり、両方の階乗が意味をもつためには $1 \le r \le 2n$ が必要である。）二つの式は一致するので、恒等式が成り立つ。

和については、$r = 0$ の項は 0 である。残りを $1 \le r \le n$ と $n+1 \le r \le 2n$ に分ける。下側のまとまりで $s = 2n+1-r$ とおく。r が 1 から n まで動くとき、s は $2n$ から

$n+1$ まで減少しながら動き、恒等式より

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n}{r} = \sum_{r=1}^{n} (2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}.$$

よって下側のまとまりは上側のまとまりに等しく、

$$\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r},$$

が示された。

小問 (ii)

表の枚数を H とすると、$H \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ であり、$\mathrm{P}(H=r) = \binom{2n}{r}/2^{2n}$ である。裏の枚数は $2n-H$ であるから、$X = \max(H, 2n-H)$ である。すなわち、$H \geq n+1$ のとき $X=H$、$H=n$ のとき $X=n$、$H \leq n-1$ のとき $X = 2n-H$ である。したがって

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = \sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} + n\binom{2n}{n} + \sum_{r=0}^{n-1}(2n-r)\binom{2n}{r}.$$

最後の和で $s = 2n-r$ とおくと、s は $2n$ から $n+1$ まで減少しながら動く。$\binom{2n}{r} = \binom{2n}{2n-r}$ であるから、この和は $\sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}$ となり、最初の和と同じになる。（これが表と裏の対称性である。裏が s 枚出る確率は、表が s 枚出る確率と等しい。）

> **考えてみよう** 範囲の半分しか動かない $\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r}$ をどのように計算すればよいか。

ここで (i) が役に立つ。全範囲にわたる和は問題文で与えられており、n の代わりに $2n$ とすると $\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1}$ である。よって (i) より

$$2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1} = n\,2^{2n}.$$

したがって

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = n\,2^{2n} + n\binom{2n}{n}, \qquad \text{ゆえに} \qquad \mathrm{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right),$$

が示された。

小問 (iii)

$a_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$ とおくと、これは正である。このとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{n!\,n!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

となる。ここで $2n+2 = 2(n+1)$ を用いた。この比は 1 より小さく、$a_n > 0$ であるから、すべての $n \geq 1$ に対して $a_{n+1} < a_n$ である。よってこの数列は狭義単調減少（strictly decreasing）である。

小問 (iv)

受け取る賞金はちょうど (ii) の X であり、支払う額は £n であるから、支払った 1 ポンドあたりの賞金の期待値は

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 + a_n.$$

(iii) より、a_n は n が最小のときに最大となるので、$n = 1$ を選ぶべきである。このとき支払った 1 ポンドあたり $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ポンドが戻ってくるので、1 ポンドあたりの利益の期待値は 50 ペンスである。（「賞金」が利益を意味するとしても $\mathrm{E}(X)/n - 1 = a_n$ であり、結論は同じである。）

検算

- $n = 1$（2 回投げる）のとき、HH または TT なら $X = 2$、HT または TH なら $X = 1$ であるから、$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$ である。公式からは $1\cdot(1+\frac{2}{4}) = \frac{3}{2}$ が得られる。
- $n = 2$ のとき、公式は $2(1+\frac{6}{16}) = \frac{11}{4}$ を与えるので、1 ポンドあたりの戻りは $\frac{11}{8} = 1.375 < 1.5$ である。$n = 3$ のときは $\frac{21}{16} = 1.3125$ であり、(iii) の予想どおり減少し続けている。
- $\mathrm{E}(X)$ の公式は、$n \leq 5$ について、2^{2n} 通りすべての投げ方の列をコンピュータで調べることにより確認した。

よくある間違い

- $H = n$ の項を二重に数えたり、まったく数えなかったりすること。この項は分割のどちら側にも属さず、$n\binom{2n}{n}$ をちょうど一度だけ寄与する。
- (iv) で、支払った 1 ポンドあたりの $\mathrm{E}(X)$ ではなく、限りなく大きくなる $\mathrm{E}(X)$ そのものを最大化しようとすること。

STEP のその先へ

超過分 $\mathrm{E}(X) - n = na_n$ は、単純ランダムウォーク（simple random walk）の出発点からの距離の期待値の半分である。スターリングの公式（Stirling's formula）により $a_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$ であるから、この超過分は $\sqrt{n/\pi}$ のように増大する。すなわち、表と裏の典型的な偏りは投げる回数の平方根のように大きくなる。一方、1 ポンドあたりの超過分 a_n は 0 に収束（converge）する。これは大数の法則（law of large numbers）の表れである。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）では、ランダムウォークとこれらの極限が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。