解答例

STEP III 2024、第 10 問

力学 ・ 転倒と滑り

STEP III 2024、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

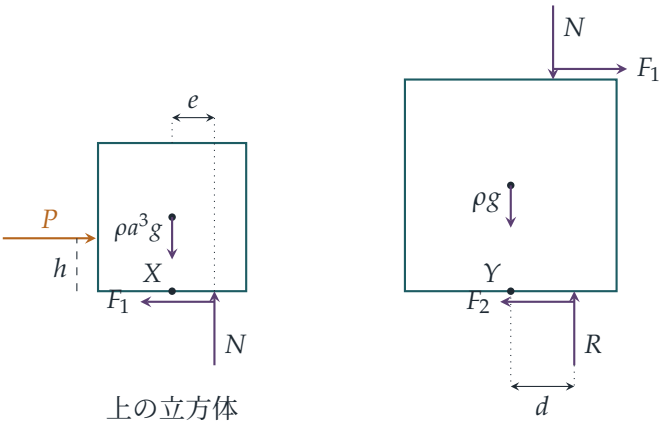
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの小問も、平衡（equilibrium）が破れる四つの仕方の比較である。すなわち、上の立方体が滑る、下の立方体が滑る、上の立方体が転倒する、二つの立方体が一緒に転倒する、の四つである。それぞれは P のある臨界値で起こり、P を 0 から増やしていくと、臨界値が最も小さいものが最初に起こる。適切な点のまわりの力のモーメント（moments）、すなわち系全体については Y、上の立方体だけについては X のまわりのモーメントを考えれば、小問 (i) の垂直抗力（normal reaction）の作用位置はほとんど手間をかけずに求まる。そして転倒（toppling）は、これらの垂直抗力の作用点が、それが働く面の端に達したときに始まる。

解答

立方体を剛体（rigid body）としてモデル化する。下の立方体の質量は ρ、上の立方体の質量は ρa^3 である。P は水平右向きに、下の立方体の上面から高さ h、すなわち地面から高さ $1+h$ の位置に働くものとする。P は水平なので、任意の点のまわりのそのモーメントは高さだけで決まり、面上のどこに働くかにはよらない。



ここで N と F_1 は二つの立方体の間の垂直抗力と摩擦力（friction）であり（ニュートン（Newton）の第三法則により、それぞれの立方体に図示してある）、X から距離 e の位置に働く。R と F_2 は地面からの垂直抗力と摩擦力であり、Y から距離 d の位置に働く。

小問 (i)

系全体。外力は P、二つの重力、R および F_2 だけである。力の成分に分けて、

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

Y のまわりのモーメントを考える。二つの重力はどちらも Y を通る鉛直線に沿って働き（それぞれの重心（centre of mass）は Y の真上にある）、F_2 は Y を通る地面に沿って働くので、これらはいずれもモーメントをもたない。残るのは高さ $1 + h$ に働く P と、距離 d に働く R であり、これらがつり合う：

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

ただし d は Y から P の向きに測る。これが求める結果である。

上の立方体のみ。力の成分に分けると $F_1 = P$、$N = \rho a^3 g$ を得る。X のまわりのモーメントを考えると、重力と F_1 はモーメントをもたないので $Ne = Ph$ となり、

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

ここでも e は X から P の向きに測る。

小問 (ii)

何も動いていない間、摩擦力は立方体の間で $F_1 = P$、地面で $F_2 = P$ である。ある接触面で必要な摩擦力が、垂直抗力の μ 倍を超えるとそこで滑り（slipping）が起こる

ので、

$$\text{上の立方体が下の立方体の上で滑る条件：} P > \mu\rho a^3 g,$$
$$\text{下の立方体が地面の上で滑る条件：} P > \mu(1+a^3)\rho g.$$

$a^3 < 1 + a^3$ なので、前者のしきい値は常に真に小さい。P を 0 から増やしていくと（転倒が先に起こらなければ）、地面の摩擦力がまだ限界に十分余裕のあるうちに、上の立方体が先に限界に達して滑り始める。上の立方体が滑っている間、それが下の立方体に及ぼす摩擦力は $\mu\rho a^3 g$ であり、地面が供給できる $\mu(1+a^3)\rho g$ よりなお小さいので、下の立方体は動かない。したがって、平衡は下の立方体の滑りではなく、上の立方体の滑りによって破れる。

小問 (iii)

平らな面の上にある物体は、その物体に働く垂直抗力の作用点が面の端に達したとき、まさに転倒しようとしている。上の立方体の底面の半幅は $\frac{1}{2}a$、下の立方体の底面の半幅は $\frac{1}{2}$ である。そこで、すべての力を ρg を単位として測ると、P の四つの臨界値は

$$P_{\text{滑り}} = \mu a^3 \text{（上の立方体が下の立方体の上で）}, \quad P_{\text{地面}} = \mu(1+a^3),$$
$$P_{\text{上}} = \frac{a^4}{2h} \left(e = \tfrac{1}{2}a \text{ より}\right), \quad P_{\text{両方}} = \frac{1+a^3}{2(1+h)} \left(d = \tfrac{1}{2} \text{ より}\right).$$

下の立方体が転倒すれば上の立方体もそれに伴って倒れる。$d = \frac{1}{2}$ が二つの立方体の同時転倒を意味するのはこのためである。

ここで $a = 1$ とおくと、$P_{\text{滑り}} = \mu$、$P_{\text{上}} = \frac{1}{2h}$、$P_{\text{両方}} = \frac{1}{1+h}$ である。小問 (ii) により $P_{\text{地面}}$ は無視してよい。

考えてみよう 上の立方体が単独で転倒する可能性を気にする必要はあるだろうか？

その必要はないが、確かめておかなければならない。$h < a = 1$ より $2h < 1 + h$ なので、

$$P_{\text{上}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{両方}}.$$

上の立方体が単独で転倒するより前に、二つの立方体が一緒に転倒する。したがって、競合するのは $P_{\text{滑り}} = \mu$ と $P_{\text{両方}} = 1/(1+h)$ だけである：

- $\mu(1+h) < 1$ ならば $\mu < \frac{1}{1+h}$ であり、滑りのしきい値に先に達するので、上の立方体が下の立方体の上で滑る。
- $\mu(1+h) > 1$ ならば $\frac{1}{1+h} < \mu$ であり、転倒のしきい値に先に達するので、二つの立方体が一緒に転倒する。

小問 (iv)

滑りが起こらないならば、競合するのは $P_{\text{上}}$ と $P_{\text{両方}}$ である。上の立方体が先に転倒するのは、ちょうど

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

のときである。ここで両辺に正の量 $2h(1+h)$ を掛けた。これはまさに与えられた条件であり、この条件のもとで平衡は上の立方体の転倒によって破れる。

小問 (v)

$a = \frac{1}{2}$ のとき、次の三つが必要である。

- (iv) の条件：$h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$、すなわち $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$ なので $h > \frac{1}{17}$。
- 設定から $h < a = \frac{1}{2}$ が必要である。
- 転倒より前に滑りが起こらないこと：$P_{\text{上}} < P_{\text{滑り}}$、すなわち $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$、つまり $\mu > \dfrac{1}{4h}$。（(ii) により、地面での滑りが最初に起こることはない。）さらに $\mu < 1$ も必要なので、$h > \frac{1}{4}$ でなければならない。

そこで $h = \frac{2}{5}$ を選ぶ。これは $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$ と $h > \frac{1}{17}$ を満たす。このとき $\frac{5}{8} < \mu < 1$ が必要であり、$\mu = \frac{3}{4}$ とする。すると臨界値（ρg 単位）は

$$P_{\text{上}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{滑り}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{両方}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{地面}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

最小は $P_{\text{上}}$ なので、P を増やしていくと、何かが滑るより前に上の立方体が転倒する。すなわち (iv) の状況は実際に起こりうる。

検算

- $P \to 0$ のとき、d と e はともに 0 に近づく。押す力がなければ、それぞれの垂直抗力は重心の真下に働くはずであり、そのとおりになっている。
- 下の立方体だけについてモーメントを考えると（その重力、距離 d に働く R と F_2、および X から距離 e に逆向きに働く N と F_1）、$Rd = Ne + F_1 \cdot 1$ を得る。これは $P(1+h) = Ph + P$ である。よって (i) の二つの答えは整合している。
- $a = \frac{1}{2}$、$h = \frac{2}{5}$、$\mu = \frac{3}{4}$ について上の四つのしきい値は厳密に計算した。また (ii)–(iv) の比較は、a、h、μ を無作為に多数選んでコンピュータで確認した。

よくある間違い

- (iii) で、滑りと二つの立方体の同時転倒だけを比較し、上の立方体が先に転倒しえないことを示さない。
- 上の立方体について地面上の点のまわりのモーメントを考えてしまい、接触面の摩擦力 F_1 が式に入り込む。X のまわりのモーメントならこれを避けられる。
- 系全体のモーメントの式で、地面からの P の高さとして $1+h$ ではなく h を用いる。

STEP のその先へ

ここでの破壊の仕方はそれぞれ力に関する不等式であり、平衡はそれらがすべて同時に成り立つ限り保たれる。最初に破れるのはしきい値が最も小さいものである。線形な制約の集まりのうちの一つが「効いている（binding）」制約になるというこの考え方は、工学において石積みや積み重ねた構造物に用いられる極限解析（limit analysis）の核心であり、より広くは線形計画法（linear programming）の核心でもある。摩擦、トルク、剛体の静力学を丁寧に扱ったものとしては、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。