解答例

STEP III 2024、第 1 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型級数

> **STEP III 2024、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで扱う和はすべて同じ方法で処理する。項を部分分数（partial fractions）に分解し、$1/r^2$ の定数倍になっている部分を取り出し（これらを足し合わせると S_N の定数倍になる）、残りはすべて $f(r)-f(r+1)$ という形の差にまとめる。こうした差の和は望遠鏡和（telescoping sum）として打ち消し合う。全体を通して N までの有限和（finite sum）で計算し、すべての部分の極限がわかった最後の段階で初めて $N\to\infty$ とする。

解答

小問 (i)

共通の分母 $r^2(r+1)$ で通分すると、

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

となり、示すべき式が得られる。

次に $r=1$ から N まで和をとる。$1/r^2$ の項からは S_N が得られ、残りの 2 つの項は打ち消し合う。

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

したがって

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

$N \to \infty$ のとき $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$ かつ $\frac{1}{N+1} \to 0$ であるから、右辺は $\frac{1}{6}\pi^2 - 1$ に近づく。無限級数の和は定義により部分和（partial sums）の極限であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

小問 (ii)

次のようにおく。

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

両辺に $r^2(r+1)(r+2)$ を掛け、隠蔽法（cover-up rule）を用いる。$r = 0$ とおくと $B = \frac{1}{2}$、$r = -1$ とおくと $C = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 1} = 1$、$r = -2$ とおくと $D = \frac{1}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1}{4}$ が得られる。r が大きいとき左辺は $1/r^4$ のオーダーであるから、右辺の $1/r$ の項は打ち消し合わなければならない。すなわち $A + C + D = 0$ であり、$A = -\frac{3}{4}$ を得る。よって

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

考えてみよう 3 つの項 $-\frac{3}{4r}$、$\frac{1}{r+1}$、$-\frac{1}{4(r+2)}$ は、1 つの打ち消し合う差には見えない。どうすれば打ち消し合う形にできるだろうか。

真ん中の係数を $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ と分け、各部分が隣の項と組になるようにする。

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

これで各括弧が打ち消し合う。

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

$N \to \infty$ とすると、最後の 2 項は 0 に近づき、$S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

小問 (iii)

示すべき式の右辺には $\frac{2}{r^2(r+1)}$ があるので、2 つの項を比較する。小問 (i) より、

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

一方、

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

ここで両方の段階で $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$ を用いた。辺々引くと、

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

すなわち

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

考えてみよう なぜ最初から無限級数を項ごとに足し合わせてはいけないのだろうか。

無限和を組み替えてよいのは各部分が収束（converge）するとわかってからなので、まず N までの和をとる。括弧の部分は打ち消し合う。

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

小問 (i) より、$N \to \infty$ のとき右辺の第 1 の和は（$2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$ に）収束し、$\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$ である。よって左辺も収束し、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

となり、示すべき式が得られる。両辺はともに $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$ に等しい。

検算

- 小問 (ii) で $N = 1$ とすると、和はただ 1 つの項 $\frac{1}{6}$ であり、公式からは $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$ が得られる。
- 数値的には、$\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$、$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$、$\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$ である。各級数の最初の 100 万項をコンピュータで足し合わせると、3 つの値すべてが少なくとも小数第 9 位まで再現される。
- 3 つの小問すべての有限和の恒等式は、59 までのすべての N について、有理数演算によって厳密に確かめた。

よくある間違い

- 打ち消し合う和の両端の項を誤ること。特に $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$ の和は 1 ではなく $\frac{1}{2}$ から始まる点に注意。
- 調和級数（harmonic series）型の部分を有限和の中でまとめておかずに、$\sum \frac{1}{r}$ のような発散（diverge）する別々の無限級数に分けてしまうこと。

STEP のその先へ

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$ という値は、オイラー（Euler）によるバーゼル問題（Basel problem）の解であり、大学では通常フーリエ級数（Fourier series）や $\sin x$ の無限積表示を用いて証明される。ここで有限和に払った注意こそ、解析学（analysis）の講義で厳密に扱われる内容である。すなわち、級数とはその部分和の極限であり、収束する級数どうしは足し合わせてよいが、発散する級数どうしはそうしてはならない。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこの立場で級数を扱っており、次に読む本として適している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。