解答例

STEP II 2024、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2024、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

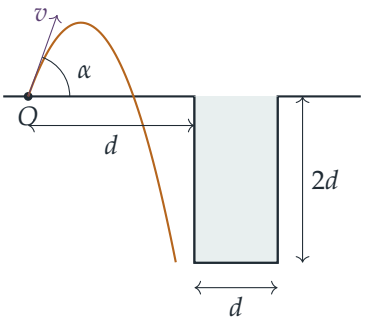
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては軌道の方程式 $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ を $t = \tan\alpha$ についての 2 次式（quadratic）とみることから導かれる。底面にきれいに着地するということは、次の 2 つを意味する。粒子が手前の縁に達したときにはまだ地面の高さより上にあり、向こう側に達するはずの時点では、すでに底面の高さより下にあるということである。それぞれの条件は t についての 2 次不等式（quadratic inequality）であり、平方完成（completing the square）によって必要な形に変形できる。小問 (ii) は、t の許される 2 つの範囲が重なることを示すだけの問題になる。

解答

粒子を重力のみを受ける質点の放物体（projectile）とみなし、空気抵抗は無視する。投射点を原点とし、x を溝に向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。すると手前の壁は直線 $x = d$、向こう側の壁は $x = 2d$、底面は $d < x < 2d$ における $y = -2d$ である。



時刻 T における水平方向の速度は $v\cos\alpha$、鉛直方向の速度は $v\sin\alpha - gT$ であるから、T を消去すると

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

を得る。ここで $t = \tan\alpha$ であり、$v^2 = \lambda dg$ と $\sec^2\alpha = 1 + t^2$ を用いた。

小問 (i)(a)

溝の手前の地面にも手前の壁にも当たらないためには、$x = d$ のとき粒子が地面の高さより真に上になければならない。（そこで $y = 0$ 以下であれば、すでに地面に当たっているか、手前の壁に当たることになる。）よって

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

となる。ここで $2\lambda/d > 0$ を掛けた。すなわち

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

であり、これが示すべき式である。左辺は平方であるから $\lambda^2 - 1 > 0$ であり、$\lambda = v^2/(dg) > 0$ なので $\lambda > 1$ が得られる。

小問 (i)(b)

次に向こう側の壁を考える。軌道は下に凸でない（上に凸の）放物線であり、$x = d$ では底面の高さ $-2d$ より上にある。軌道が $x = 2d$ より前で $y = -2d$（底面）に達するのは、$x = 2d$ においてすでにその高さより下にあるとき、すなわち $y(2d) < -2d$ のときであり、かつそのときに限る。逆に $y(2d) \geq -2d$ ならば、底面に達しないまま $x = 2d$ に到達するので、向こう側の壁に触れる（あるいは溝を完全に飛び越える）。

考えてみよう なぜ 1 点 $x = 2d$ だけを調べれば十分なのか？

$y(x) + 2d$ は最高次の係数が負の x の 2 次式で、$x = d$ において正だからである。これは $x = d$ より先にちょうど 1 つの根をもち、その根が $2d$ より手前にあるのは、$x = 2d$ においてこの 2 次式がすでに負であるときであり、かつそのときに限る。

よって

$$y(2d) = 2dt - \frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d} < -2d \iff \lambda t - (1+t^2) < -\lambda \iff t^2 - \lambda t + 1 - \lambda > 0,$$

が必要である。ここで $\lambda/(2d) > 0$ を掛けた。4 を掛けて平方完成すると

$$4t^2 - 4\lambda t + \lambda^2 > \lambda^2 - 4 + 4\lambda, \qquad \text{すなわち} \qquad (2\tan\alpha - \lambda)^2 > \lambda^2 + 4(\lambda - 1),$$

となり、これが示すべき式である。

$\alpha > 45^\circ$ **の導出** (a) より $\lambda > 1$ であるから、$\lambda^2 + 4(\lambda - 1) > \lambda^2 > 0$ である。$s = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}$ とおくと $s > \lambda$ である。(b) の不等式は

$$2t > \lambda + s \qquad \text{or} \qquad 2t < \lambda - s.$$

を意味する（「または」）。$s > \lambda$ であるから、2 つ目の場合は $t < 0$ となる。しかし (a) から $t > 0$ が従う。実際、$(t - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1 < \lambda^2$ から $|t - \lambda| < \lambda$ が得られるので、$t > 0$ である。（物理的には、粒子は手前の縁を越えるために上昇しなければならない。）したがって 1 つ目の場合が成り立ち、

$$2t > \lambda + s > \lambda + \lambda = 2\lambda > 2,$$

となるので、$\tan\alpha > \lambda > 1$ である。$0 < \alpha < 90^\circ$ であるから、$\alpha > 45^\circ$ が得られる。

小問 (ii)

逆に、2 つの条件を合わせれば十分である。$y(d) > 0$ ならば、$y(0) = 0$ であり y は上に凸（concave）なので、区間 $0 < x \leq d$ 全体で $y > 0$ となり、粒子は地面にも手前の壁にも当たらない。さらに $y(2d) < -2d$ ならば、粒子は d と $2d$ の真に間にあるある x で底面に達し、それまでは溝の内部にとどまる。よって、任意の $\lambda > 1$ に対して、両方の不等式を満たす $t > 0$ が存在することを示せばよい。

(a) より、許される値は $\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} < t < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ である。(b) と $t > 0$ を合わせると、許される値は $t > \frac{1}{2}(\lambda + s)$ である。両方を満たす t が存在するための条件は

$$\tfrac{1}{2}(\lambda + s) < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \iff s < \lambda + 2\sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

である。（$\frac{1}{2}(\lambda + s) > \lambda > \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ であるから、(a) の下限は問題にならない。）両辺は正であるから、2 乗してよい：

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 4\lambda - 4 < \lambda^2 + 4\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1} + 4(\lambda^2 - 1) \\ \iff \quad & 4\lambda < 4\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1} + 4\lambda^2 \\ \iff \quad & 1 < \sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda, \end{aligned}$$

ここで $4\lambda > 0$ で割った。$\lambda > 1$ であるから最後の行は正しい。よって区間

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

は空でない。$\tan\alpha$ がこの区間に入るように α を選べば（tan は $(0^\circ, 90^\circ)$ 上ですべての正の値をとるので、これは可能である）、粒子はどちらの側面にも触れずに底面に着地する。

検算

- $\lambda = 2$ とする。区間は $1+\sqrt{2} < \tan\alpha < 2+\sqrt{3}$ であり、これはちょうど $67.5^\circ < \alpha < 75^\circ$ である。$y = xt - x^2(1+t^2)/(4d)$ に $\alpha = 70^\circ$ を代入してみると、$y(d) \approx 0.61d > 0$、$y(2d) \approx -3.05d < -2d$ となり、確かにそうなっている。
- $\lambda \to 1^+$ のとき、区間の両端はともに 1 に近づくので、許される範囲は $\alpha = 45^\circ$ に縮む。$v^2 = dg$ のとき粒子は手前の縁にかろうじて届くだけであり、そのためには最大到達距離を与える角度が必要である。
- ランダムに選んだ数千組の (λ, α) について、時間を少しずつ進めて運動を計算するコンピュータによる検証を行ったところ、すべての場合で 2 つの不等式と一致した。

よくある間違い

- 条件を $y(d) > 0$ ではなく $y(d) > -2d$（底面より上）としてしまう。手前の壁は地面の高さまでずっと続いている。
- (b) で $2\tan\alpha < \lambda - s$ の場合を除外し忘れる。これには $\tan\alpha > 0$ という事実が必要である。
- (ii) で、両辺が正であることを先に確認せずに不等式を 2 乗する。

STEP のその先へ

ここでは、物理的な条件（「溝に着地する」）が、発射パラメータの空間において不等式で切り取られる領域となり、問題はその領域が空でないかどうかということになる。これは最適化（optimisation）と制御（control）の出発点である。すなわち、実現可能な入力の集合を記述し、その境界を求めることである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とその拡張（空気抵抗、回転座標系）を大学 1 年生のレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。