解答例

STEP II 2024、第 8 問

純粋数学 • 算術幾何平均

> **STEP II 2024、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.6 節「**算術幾何平均**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/agm.html

鍵となる考え方

2 つの数列は互いに挟み込むように近づいていく。算術平均は減少し、幾何平均は増加し、その差は毎回少なくとも半分になる。したがって両者は共通の極限 M に落ち着く。これが x_0 と y_0 の**算術幾何平均**（arithmetic–geometric mean）である。小問 (ii) では、置換（substitution）によって組 (p, q) に対する積分が、それらの平均の組に対する積分に変わる。したがって反復を進めても積分の値は決して変わらない。$n \to \infty$ とすると、それは計算できる積分に帰着する。

解答

小問 (i)

まず、すべての n について $0 < y_n < x_n$ であることを数学的帰納法（induction）で示す。$n = 0$ のときは成り立つ。$0 < y_n < x_n$ と仮定する。すると $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$ であるから

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

であり、これを整理すると $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$、すなわち $y_{n+1} < x_{n+1}$ を得る。また $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$ である。以上で帰納法が完結し、すべての $n \geq 0$ について $y_{n+1} < x_{n+1}$ が成り立つ。

$y_n < x_n$ を用いると

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

となる。ここで 2 行目では $x_n > y_n > 0$ であることと、平方根が増加関数であることを用いた。

よって (y_n) は増加数列である。さらに上に有界でもある。実際 $y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$ であるから、すべての n について $y_n < x_0$ である。定理より、ある $M \le x_0$ が存在して $y_n \to M$ となる。（数列は y_0 から増加するので、$M \ge y_0 > 0$ でもある。）

差については、左側の不等式 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$ は最初に証明したことである。右側の不等式については、$y_{n+1} > y_n$ であるから

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

これを繰り返し用いると

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

となるので、はさみうちの原理（squeezing）により $x_n - y_n \to 0$ である。最後に、$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ は M に収束する数列と 0 に収束する数列の和であるから、$x_n \to M$ も成り立つ。

小問 (ii)

$a = \frac{1}{2}(p+q)$、$g = \sqrt{pq}$ とおき、t についての積分を J とよぶ。

置換。 $x > 0$ に対して $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

であるから、t は狭義単調増加であり、$x \to 0^+$ のとき $-\infty$ から、$x \to \infty$ のとき $+\infty$ まで動く。すなわち、この置換は $(0, \infty)$ を実数直線全体へ一対一（one-to-one）に写す。次に、根号の中の 2 つの因数を書き直す。

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + pq}{2x}\right)^2,$$
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 &= \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.\end{aligned}$$

$x > 0$ かつ $x^2 + pq > 0$ であるから、積の平方根は

$$\frac{x^2+pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q). \end{aligned}$$

同じ積分を直接読む。 $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$ かつ $pq = g^2$ であるから、J の被積分関数は $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$ であり、これは t について偶関数（even function）である。よって

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

となる。これが正当であるのは、a、g が正であり、かつ $g < a$ だからである（$p \neq q$ なので、小問 (i) の不等式による）。J の 2 つの表示を比べると

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big),$$

が得られ、示すべきことが示された。

$\mathrm{I}(x_0,y_0)$ の計算。 これを $(p,q) = (x_n,y_n)$ に適用すると（$0 < y_n < x_n$ なので適用してよい）、$\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$ が得られるので

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{任意の} n.$$

考えてみよう $n \to \infty$ として、積分が $\mathrm{I}(M,M)$ に収束すると言いたい。無限区間上の積分の中に極限を入れることは、どのようにして正当化できるだろうか？

はさみうちを使えば、微妙な極限の議論を避けることができる。$0 < y_n < x_n$ とすべての x に対して

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

であるから、平方根をとって逆数をとり（これにより不等号の向きが逆になる）、積分すると

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

$c>0$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$ であるから

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{任意の} n.$$

中央の辺は n によらず一定であり、$M>0$ のもとで $x_n \to M$ かつ $y_n \to M$ であるから、両側の評価はともに $\pi/(2M)$ に収束する。したがって

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

検算

- $x_0=2$、$y_0=1$ とする。反復により $(1.5,\ 1.41421)$、続いて $(1.45711,\ 1.45648)$ が得られ、その次には両者が有効数字 5 桁で一致して $M\approx 1.45679$ となる。よって $\pi/(2M)\approx 1.07826$ であり、$\mathrm{I}(2,1)$ を数値的に計算してもやはり 1.07826 となる。
- $p=q$ のとき、$\mathrm{a}(p,p)=\mathrm{g}(p,p)=p$ であるから、恒等式は自明に成り立つ。答え $\pi/(2M)$ はこれと整合的である。実際 $\mathrm{I}(M,M)=\pi/(2M)$ である。
- 収束は極めて速い。最初の数ステップを過ぎると、差はおおよそ毎回 2 乗になり、証明した「半分になる」よりはるかに良い。

よくある間違い

- 帰納法の中で、先に $y_n<x_n$（および平方根が意味をもつための $y_n>0$）を確立せずに $y_{n+1}<x_{n+1}$ を使ってしまう。
- t についての積分が実数直線全体にわたるので、$\mathrm{I}(a,g)$ の 2 倍になることを忘れる。2 つの因数 2 は打ち消し合わなければならない。
- 何の正当化もなしに $\mathrm{I}(x_n,y_n)\to\mathrm{I}(M,M)$ と書いてしまう。上のはさみうちが、きちんとした根拠を与える。

STEP のその先へ

共通の極限 M はガウス（Gauss）の算術幾何平均であり、積分 I は**完全楕円積分**（complete elliptic integral）である。ガウスは 1799 年にこの恒等式を発見した。これは楕円積分を、さらには π そのものを驚くほど速く計算する方法を与える（ガウス–ルジャンドル（Legendre）のアルゴリズム）。冒頭で引用した単調収束定理（monotone convergence theorem）や、極限と積分を入れ替える際に必要な注意は、

解析学（analysis）の最初の講義の中心的なテーマである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらにきちんと出会うのに最適な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。