解答例

STEP II 2024、第 7 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP II 2024、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

それぞれの括弧は円の方程式なので、C_1 は単に 2 つの円である。C_2 については、括弧を展開するとすべてが x^2+y^2 と x^2 にまとまるので、水平な直線で切ると x^2 についての 2 次方程式（quadratic）が得られる。したがって交点の個数を数えることは、その 2 次方程式の正の解の個数を数えることに帰着し、それは判別式（discriminant）、解の和、解の積の 3 つによって決まる。

解答

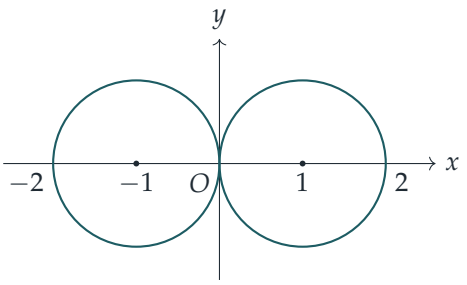
以下を通して、

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

とおく。

小問 (i)

積が 0 になるのは、いずれかの因数が 0 になるときであり、かつそのときに限る。よって C_1 は円 $A=0$ と円 $B=0$ の和集合（union）である。これらはそれぞれ $(1,0)$ と $(-1,0)$ を中心とする半径 1 の円である。どちらも原点を通り、原点で互いに接する（そこでの共通接線（tangent）は y 軸である）。最も高い点は $(\pm 1,1)$ であり、曲線は $x=-2,0,2$ で x 軸と交わる。



小問 (ii)(a)

$s = x^2 + y^2$ とすると、A と B はそれぞれ $s - 2x$、$s + 2x$ の形をしているので、

$$AB = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2.$$

である。直線 $y = k$ 上では、方程式 $AB = \frac{1}{16}$ は

$$\begin{aligned}(x^2 + k^2)^2 - 4x^2 &= \tfrac{1}{16}\\ x^4 + 2k^2x^2 + k^4 - 4x^2 - \tfrac{1}{16} &= 0\\ x^4 + 2(k^2 - 2)x^2 + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) &= 0,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

ここで $u = x^2$ とおくと、

$$u^2 + 2(k^2 - 2)u + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) = 0. \qquad (*)$$

を得る。解 $u > 0$ はそれぞれ 2 つの交点 $x = \pm\sqrt{u}$ を与え、解 $u = 0$ は 1 つの点 $(x = 0)$ を与え、解 $u < 0$ は交点を与えない。したがって $(*)$ の解の符号を知る必要がある。それは次の 3 つの量からわかる。

- 判別式の 4 分の 1、$(k^2 - 2)^2 - \left(k^4 - \frac{1}{16}\right) = \frac{65}{16} - 4k^2$。これは k が $\frac{\sqrt{65}}{8}$ より小さい、等しい、大きいに応じて、正、0、負となる。
- 解の和 $2(2 - k^2)$。
- 解の積 $k^4 - \frac{1}{16}$。これは $k > 0$ のとき $k - \frac{1}{2}$ と同じ符号をもつ。

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{65}}{8} \approx 1.008$ であること、また解が実数であるときは常に $k^2 \leq \frac{65}{64} < 2$ となるので解の和が正であることに注意する。

考えてみよう 解の積が負であるとき、判別式を調べる必要はあるだろうか？

その必要はない。積が負ならば、解は必ず実数であり（このとき判別式 $b^2 - 4ac$ は正となる）、しかも符号が異なる。では、場合を順に調べよう。

- $0 < k < \frac{1}{2}$：積が負なので、正の解はちょうど 1 つである。**交点は 2 個**。
- $k = \frac{1}{2}$：$(*)$ は $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$ となるので $u = 0$ または $u = \frac{7}{2}$ であり、$x = 0$ と $x = \pm\sqrt{7/2}$ を得る。**交点は 3 個**。
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$：判別式が正なので、相異なる 2 つの実数解をもつ。その積と和はどちらも正なので、2 つの解はともに正である。**交点は 4 個**。
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$：重解 $u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$ をもち、$x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ を得る。**交点は 2 個**。
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$：実数解をもたない。**交点はない**。

小問 (ii)(b)

(a) より、直線 $y = k$ は $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$ のとき C_2 と交わり、それより大きい k では交わらない。C_2 の方程式には y が y^2 の形でしか現れないので、負の k がより高い点を与えることはない。したがって C_2 上の y 座標の最大値は $\frac{\sqrt{65}}{8}$ であり、それは $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ でとられる。

C_1 上で最も高い点は円の頂上 $(\pm 1, 1)$ である。$\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$ であるから、C_2 の最も高い点は C_1 のそれよりも y **軸に近い**（ただし $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$ なので、わずかに高い）。

小問 (ii)(c)

$A < 0$ かつ $B < 0$ であると仮定する。$A < 0$ から $2x > x^2 + y^2 \geq 0$ となるので $x > 0$ である。$B < 0$ から $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$ となるので $x < 0$ である。これらは互いに矛盾するので、A と B がともに負になることはない。（幾何学的には、2 つの開円板（open disc）は重ならないということである。）

C_2 上では $AB = \frac{1}{16} > 0$ なので、A と B は 0 でなく、同じ符号をもつ。ともに負になることはないので、ともに正である。$A > 0$ は $(x-1)^2 + y^2 > 1$ を意味するので、その点は $(1, 0)$ を中心とする円の真に外側にある。同様に $B > 0$ より、その点は $(-1, 0)$ を中心とする円の真に外側にある。よって C_2 のすべての点は両方の円の外側にある。すなわち、C_2 は全体が C_1 の外側にある。

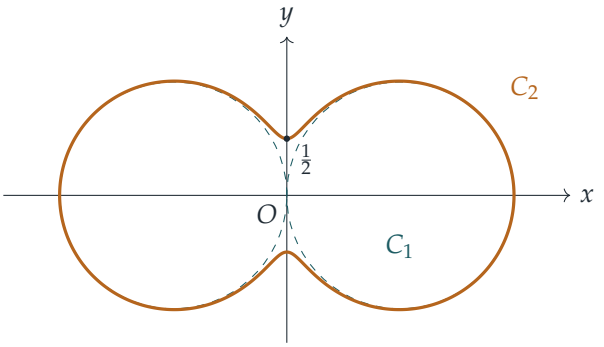
小問 (ii)(d)

概形を描くのに役立つ C_2 の特徴は次のとおりである。

- x^2 と y^2 しか現れないので、両方の座標軸に関して対称である。
- $y = 0$ のとき、$(*)$ から $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$ となるので、C_2 は $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$ で x 軸と交わる。これは ± 2 のわずかに外側である。

- $x = 0$ のとき $k^4 = \frac{1}{16}$ なので、C_2 は $(0, \pm\frac{1}{2})$ で y 軸と交わる。
- 最も高い点と最も低い点は $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$ である。

(a) で数えた交点の個数から形がわかる。$|y| < \frac{1}{2}$ では交点は 2 個だけ（外側の両脇）である。$\frac{1}{2} < |y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$ では 4 個なので、曲線は 2 つのこぶの間で $(0, \pm\frac{1}{2})$ まで下がってくぼむ。したがって C_2 は両方の円を囲む 1 つの閉じた「ピーナッツ」形の曲線であり、y 軸のところでくびれている。



（C_2 を極形式（polar form）で表すと $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$ となる。上の曲線はこの式を用いて描いた。）

検算

- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ のとき判別式 $\frac{65}{16} - 4k^2$ は 0 となり、曲線の頂上と一致する。重解 $u = \frac{63}{64}$ からは $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$ および $4x^2 = \frac{63}{16}$ が得られ、確かに $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$ である。
- 点 $(0, \frac{1}{2})$：$A = B = \frac{1}{4}$ なので $AB = \frac{1}{16}$ である。
- $k = 0.1$、0.49、0.51、1.0、1.007、1.01 について、$y = k$ と C_2 の交点の個数をコンピュータで数えると、それぞれ 2、2、4、4、4、0 個となる。また数値的に探索すると、高さの最大値 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$ が $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$ で得られる。

よくある間違い

- $u = 0$ が 2 つの点を与えるとしてしまうこと。$x = \pm\sqrt{0}$ は 1 つの点であり、だからこそ $k = \frac{1}{2}$ のときの交点は 4 個ではなく 3 個になる。
- 交点を数える際に、接する場合 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ を忘れること。
- (c) で、両方が負である可能性を排除せずに「A と B は同じ符号をもつ」と結論するだけで終えてしまうこと。その排除こそが前半の要点である。

STEP のその先へ

C_2 は曲線族 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$、すなわち関数 AB の等高線（level curve）の 1 つである。c が増加するにつれて曲線の形は変化する。まず（$c<0$ のとき）円の内側にある 2 つの離れた卵形となり、$c=0$ で 8 の字（figure-of-eight）の C_1 となり、その後 1 つのピーナッツ形となる。そのくぼみは $c\geq 4$ になると消える。位相（topology）の変化は、ちょうど原点にある AB の臨界点（critical point）の値のところで起こる。臨界点を通過するときに等高線がどのように変化するかを追うことは、モース理論（Morse theory）の出発点となる考え方である。また、これと密接に関係するカッシーニの卵形線（Cassini ovals）も、ベルヌーイ（Bernoulli）のレムニスケート（lemniscate）を 8 の字として、まったく同じように振る舞う。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、このような陰関数表示の曲線の概形を描く、STEP 形式の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。