解答例

STEP II 2024、第 6 問

純粋数学 ・ 二項級数の係数

> **STEP II 2024、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの小問も、隣り合う項の比が鍵となる。二項係数（binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ も二項級数の係数も、一段進むごとに因数が一つずつ増える積であるから、第 n 項と第 $(n-1)$ 項を比べると簡潔な漸化式（recurrence）が得られる。同じ漸化式に従い、同じ値から始まる二つの数列は等しい。最後の恒等式は、$(1-x)^{-3/2}$ を $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$ と書いて係数を比較することで得られる。$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$ を掛けると、係数の列がその累積和の列に変わるからである。

解答

小問 (i)

$P(n)$ を命題 $T_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ とする。

基本ステップ（*base case*）。 $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}=1=T_0$ であるから、$P(0)$ は成り立つ。

帰納ステップ（*inductive step*）。ある $n\geq 1$ に対して $P(n-1)$ が成り立つと仮定する。$\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$ かつ $\binom{2n-2}{n-1}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$ であるから、割り算をすると

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

これと漸化式および $P(n-1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n}\,T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4\cdot 2^{2n-2}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

となり、これは $P(n)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $P(n)$ が成り立つ。

小問 (ii)

一般の指数に対する二項定理（binomial theorem）により、$(1-x)^{-1/2}$ における x^r の係数は

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!},$$

である。分子の r 個の因数はいずれも負であり、$(-x)^r$ から生じる $(-1)^r$ がその符号を打ち消すからである。a_{r-1} から a_r に進むと、分子に因数 $\frac{2r-1}{2}$ が一つ、分母に因数 r が一つ加わるので、$r \geq 1$ に対して

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{すなわち} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r}\,a_{r-1}.$$

? **考えてみよう** なぜこの漸化式から直ちに $a_r = T_r$ が得られるのか。

二つの数列はどちらも 1 から始まり（定数項である $a_0 = 1$ と $T_0 = 1$ による）、第 $r-1$ 項から第 r 項を得る規則も同じである。一行の帰納法で証明は完了する。$a_{r-1} = T_{r-1}$ ならば、$a_r = \frac{2r-1}{2r}a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r}T_{r-1} = T_r$ である。よってすべての $r \geq 0$ に対して $a_r = T_r$ であり、(i) より

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}.$$

小問 (iii)

同様にして、$(1-x)^{-3/2}$ における x^r の係数は

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}.$$

である。a_r と b_r の分子は、どちらも連続する r 個の「奇数の半分」の積である。b_r の積は、a_r の最初の因数 $\frac{1}{2}$ を失い、最後に因数 $\frac{2r+1}{2}$ が加わったものである。$r!$ は約分されるので、

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1.$$

（$r=0$ のときは両方の積が空積であり、$b_0 = a_0 = 1$ となって一致する。）したがって

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

小問 (iv)

$(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$ かつ $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$ であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right).$$

右辺において、x^n の項は、各 $r = 0, 1, \ldots, n$ について一つ目の括弧から $a_r x^r$ を、二つ目の括弧から x^{n-r} を選ぶことで生じる。これらの選び方の係数はそれぞれ $a_r \cdot 1$ であるから、x^n の係数は $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ である。両辺の x^n の係数を比較すると、

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r.$$

(ii) と (iii) で得た式を代入すると

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r},$$

となり、示すべき式が得られた。（この議論は $n = 0$ の場合にも成り立ち、そのとき両辺はともに 1 である。）

検算

- 小さい場合：$a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$ であり、$\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$ と一致する。
- $n = 3$ のとき、(iv) の左辺は $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$、右辺は $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$ である。
- 直接計算すると $(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$ であり、$b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$ である。
- 厳密な分数を用いたコンピュータによる検証で、$n \leq 29$ のすべてについて (i)–(iv) が確認された。$x = 0.3$ において各級数の最初の 30 項を足すと 1.19523 と 1.70747 が得られ、これは $(0.7)^{-1/2}$ と $(0.7)^{-3/2}$ に一致する。

よくある間違い

- 二項係数の符号の誤り：$\binom{-1/2}{r}$ は符号が交互に変わるが、$(-x)^r$ から生じる因数 $(-1)^r$ がこれを打ち消すので、a_r と b_r はすべて正である。
- 基本ステップを忘れる、あるいは漸化式だけから $a_r = T_r$ を主張する：初期値 $a_0 = T_0 = 1$ が一致することも必要である。

STEP のその先へ

べき級数に $(1-x)^{-1}$ を掛けて部分和を作るのは、**母関数**（generating functions）の基本的な道具である。母関数は、数列に関する問題をべき級数の代数に置き換えるものである。数 $\binom{2n}{n}/4^n$ は確率にも現れる。これは公平な硬貨を $2n$ 回投げたとき表がちょうど n 回出る確率であり、スターリング（Stirling）の公式によって、n が大きいとき $1/\sqrt{\pi n}$ のように振る舞うことがわかる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）にはこの趣旨の問題がさらに収められており、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は母関数を本格的に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。