解答例

STEP II 2024、第 5 問

純粋数学 ・ 値域とディオファントス方程式

> **STEP II 2024、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

$\mathbb{Z}$ 上の多項式（polynomial）の値域（range）は、変数を整数だけずらしても変わらない。そこで平方完成（completing the square）（あるいは立方完成）を行い、各関数を最も簡単な「ずらした形」に直す。すると、二つの値域が共通部分をもつかどうかという問いは、二つの整数の未知数をもつ方程式が解をもつかどうかという問いに変わる。ここでの工夫は、その方程式を**二つの整数の積 = 小さな定数**という形に変形することである。小さな数の因数分解には数通りの可能性しかないので、それぞれを調べればよい。

解答

小問 (i)

平方完成すると、

$$f_1(n) = (n+3)^2 + 2 = F_1(n+3).$$

n が $\mathbb{Z}$ 全体を動くとき、$m = n+3$ も同様に整数全体を動く（任意の整数 m は $n = m-3$ から得られる）。したがって f_1 の値域は $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$ であり、これはちょうど F_1 の値域である。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

同様に $g_1(n) = (n-1)^2 + 4$ であるから、同じ議論により g_1 の値域は $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$ である。小問 (i) より、共通の値が存在するには、次を満たす整数 m、k が必要である。

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

ここで $m-k$ と $m+k$ の差は $2k$ で偶数であるから、両者の偶奇（parity）は一致する。両方とも奇数ならば積も奇数であり、2 にはなりえない。両方とも偶数ならば積は 4 の倍数であり、やはり 2 にはなりえない。よってそのような m、k は存在せず、二つの値域の共通部分は空である。

小問 (iii)

平方完成すると、

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

であるから、値域は m、k が $\mathbb{Z}$ 全体を動くときの $\{m^2-7\}$ と $\{k^2-2\}$ である。共通の値が存在するには、

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

が必要である。5 は素数（prime）であるから、組 $(m-k,\, m+k)$ は $(1,5)$、$(5,1)$、$(-1,-5)$、$(-5,-1)$ のいずれかである。二つの因数を足すと $2m = \pm 6$、引くと $2k = \pm 4$ となるので、どの場合も $m^2 = 9$ かつ $k^2 = 4$ である。共通の値は

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

である。したがって両方の値域に属する整数は $\boxed{2}$ のみである。確かめると、$\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$ かつ $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$ である。

小問 (iv)

p について平方完成すると、

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

となる。両項とも平方に正の定数を掛けたものだからである。（等号は $q = 0$ かつ $p = 0$ のときに限り成り立つ。）

3 次関数については、f_3 を $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ と比較する。

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

そこで $m = n-1$ とおくと（これもやはり $\mathbb{Z}$ 全体を動く）、f_3 の値域は $\{m^3 + 4m + 5\}$ であり、g_3 の値域は $\{k^3 + 4k - 6\}$ である。共通の値が存在するには、次を満たす整数 m、k が必要である。

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

考えてみよう この小問の最初の不等式は、この方程式を解くのにどう役立つだろうか？

$p=k$、$q=m$ として不等式を用いると、$k^2+km+m^2+4\geq 4$ である。特に第 2 の因数は正の整数であるから、$k-m$ も正でなければならない。11 は素数であるから、可能性は二つしかない。

- $k-m=11$ かつ $k^2+km+m^2+4=1$。第 2 の因数は 4 以上であるから、これは不可能である。
- $k-m=1$ かつ $k^2+km+m^2+4=11$。

後者の場合、$k=m+1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(m+1)^2+m(m+1)+m^2&=7\\ 3m^2+3m+1&=7\\ m^2+m-2=(m+2)(m-1)&=0,\end{aligned}$$

よって $m=1$（このとき $k=2$）または $m=-2$（このとき $k=-1$）である。対応する値は

$$m=1:\ 1+4+5=10,\qquad m=-2:\ -8-8+5=-11.$$

である。したがって両方の値域に属する整数は $\boxed{10\text{ と }-11}$ である。

元の変数に戻すと、$f_3(2)=8-12+14=10$ かつ $g_3(2)=8+8-6=10$ であり、また $f_3(-1)=-1-3-7=-11$ かつ $g_3(-1)=-1-4-6=-11$ である。興味深いことに、二つの共通の値はどちらも同じ入力 n から得られている。

検算

- 上で行ったように代入して確かめる。f_2 と g_2 はともに $n=4$ で値 2 をとり、f_3 と g_3 は $n=2$（値 10）と $n=-1$（値 -11）で一致する。
- 小さな値を書き出すのは、小問 (ii) の手早い確認になる。f_1 は $2,3,6,11,18,27,\ldots$ を、g_1 は $4,5,8,13,20,29,\ldots$ を与える。どちらの列にも、もう一方の列の数は現れない。
- $|n|\leq 3000$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、(i) の値域は一致し、(ii) の値域は共通部分をもたず、共通の値は (iii) では 2、(iv) では 10、-11 のみであることが確認された。

よくある間違い

- 同じ n について $f(n) = g(n)$ を解いて共通の値を求めてしまう。二つの入力は異なってよいので、独立な二つの未知数が必要である。(iii) では $f_2(n) = g_2(n)$ でたまたま正しい答えが得られるが、方法としては誤りである。
- (ii) で、$(m-k)(m+k) = 2$ から $\{m-k, m+k\} = \{1, 2\}$ であるとだけ論じ、負の因数の組を忘れてしまう。偶奇による議論なら、すべての場合を一度に扱える。
- (iv) で、11×1 という因数分解を除外し忘れる。これを除外するのが、あの不等式の役割である。

STEP のその先へ

$m^2 - k^2 = 5$ や $k^3 + 4k = m^3 + 4m + 11$ のように、整数解のみを考える方程式を**ディオファントス方程式**（Diophantine equation）という。一方の辺を因数分解し、もう一方の辺の約数を利用する方法は、これらを解くための最も強力な初等的手法の一つである。(ii) の偶奇の工夫は一般化できる。整数が二つの平方数の差として表せるのは、それが奇数であるか 4 の倍数であるときに限る。さらに学びたい人には、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）が、大学 1 年生向けの整数論入門として優れている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。