解答例

STEP II 2024、第 4 問

純粋数学 ・ ベクトルと角の二等分線

> **STEP II 2024、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべてを単位ベクトル（unit vector）に縮めて考える。$\hat{\mathbf{x}}$ と $\hat{\mathbf{y}}$ をそれぞれ OX と OY の向きの単位ベクトルとすると、$\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ はひし形（rhombus）の対角線（diagonal）であり、ひし形の対角線はその角を二等分（bisect）する。与えられた $\mathbf{b}$ は $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ の正の定数倍にすぎないので、どの二等分ベクトル（bisecting vector）も 2 つの単位ベクトルの和の正の定数倍である。これにより、小問 (ii) の内積（dot product）はただ 1 つの対称な式にまとまる。

解答

以下を通じて、角 XOY を θ と書く。O、X、Y は同一直線上にない（not collinear）ので $0<\theta<\pi$ であり、したがって

$$-1<\cos\theta<1.$$

以下では、この 2 つの狭義の不等式（strict inequality）をどちらも用いる。

小問 (i)(a)

$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$、$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ とおくと、$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$ である。このとき

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

これは $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の一次結合であるから、平面 XOY 上にある。また、これは零ベクトルではない。なぜなら、$\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$ ならば $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$ となり、O、X、Y が同一直線上に並んでしまうからである。

次に角を比べる。

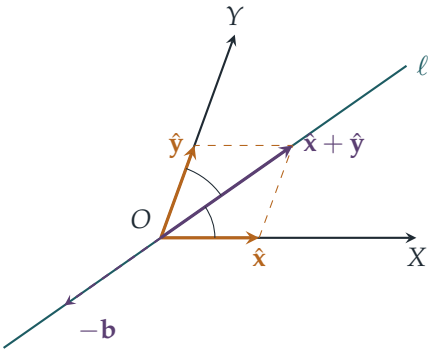
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta) = \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

であるから、$\mathbf{b}$ と $\overrightarrow{OX}$ のなす角 α および $\mathbf{b}$ と $\overrightarrow{OY}$ のなす角 β は

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

を満たす。どちらの角も $[0,\pi]$ に属し、この範囲で余弦は単射（one-to-one）であるから、$\alpha=\beta$ である。さらに $1+\cos\theta>0$ より $\cos\alpha>0$ であり、どちらの角も 90° より小さい。よって $\mathbf{b}$ は角 XOY の二等分ベクトルである。

他の二等分ベクトル。



$\hat{\mathbf{x}}$ と $\hat{\mathbf{y}}$ の長さは等しいので、これらが張る平行四辺形（parallelogram）はひし形であり、その対角線 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ は角 XOY を 2 つの等しい角に分ける。平面 XOY において、OX と OY と等しい角をなす向きは、この対角線を含む直線 ℓ に沿った 2 つの向きだけである。ベクトルを ℓ からずらすように回転させると、一方の辺には近づき他方の辺からは遠ざかるので、2 つの角は等しくなくなる。ℓ 上では、$\mathbf{b}$ の向きはそれぞれの辺と角 $\frac{1}{2}\theta < 90^\circ$ をなす。逆向きはそれぞれの辺と角 $180^\circ - \frac{1}{2}\theta > 90^\circ$ をなすので、除外される。したがって、どの二等分ベクトルも ℓ に沿って $\mathbf{b}$ と同じ向きを向いており、すなわち $\mathbf{b}$ の正の定数倍である。

同じ議論を代数的に述べる。平面上の任意のベクトルは $\mathbf{v} = p\hat{\mathbf{x}} + q\hat{\mathbf{y}}$ と書ける。角が等しいことは $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$ を意味し、

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p+q\cos\theta) - (p\cos\theta+q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

$\cos\theta \neq 1$ であるから $p=q$ でなければならず、$\mathbf{v} = p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$ となる。角が鋭角となるのは $p>0$ のときに限る。

小問 (i)(b)

点 B が直線 XY 上にあるのは、ある実数 t について $\overrightarrow{OB} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ となるとき、かつそのときに限る。必要なのは

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x} + \lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}.$$

である。$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は平行でないので、係数を比較してよい。すなわち $\lambda|\mathbf{y}| = 1-t$ かつ $\lambda|\mathbf{x}| = t$ である。これらを足し合わせると

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|}, \qquad t = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|}.$$

を得る。すると $0 < t < 1$ として $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$、$\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ となるので、B は X と Y の間にあり、

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

これは角の二等分線の定理（angle bisector theorem）である。すなわち、O からの二等分線は XY を隣り合う 2 辺の比に分ける。

小問 (i)(c)

ここで $\overrightarrow{OB}$ は $\mathbf{b}$ の零でない定数倍であるから、$OB \perp XY$ は $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$ を意味する。$\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ と $\mathbf{y} - \mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta) \\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|)(1 + \cos\theta).\end{aligned}$$

ここで $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$ かつ $1 + \cos\theta > 0$ であるから、これが 0 となるのは $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$ のときに限る。すなわち $OX = OY$ であり、三角形 XOY は二等辺三角形（isosceles triangle）である。

小問 (ii)

$\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ の向きの単位ベクトルとする。どの 3 点も同一直線上にないので、特に O, P, Q も同一直線上になく、小問 (i)(a) がそれぞれの角に適用できる。したがって、選んだ二等分ベクトルは、ある $\alpha, \beta, \gamma > 0$ を用いて

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q} + \mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r} + \mathbf{p}),$$

と表されなければならず、3 つとも零ベクトルではない。

考えてみよう 3 つの二等分ベクトルは任意の正の定数倍である。それなのに、どうすれば 3 つの角すべてについて一度に何かを言えるのだろうか。

倍率は正なので、内積の符号を変えることはできない。そして問題になるのは符号だけである。零でないベクトルどうしのなす角は、内積が正、0、負のどれであるかに応じて、鋭角、直角、鈍角となるからである。$S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ とおく。$\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$ を用いると、

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1 + S).$$

まったく同様に、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$ と $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 1$ を用いると、

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \beta\gamma\,(1 + S), \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \gamma\alpha\,(1 + S).$$

$\alpha\beta$、$\beta\gamma$、$\gamma\alpha$ はすべて正であるから、3 つの内積はすべて $1 + S$ と同じ符号をもつ。よって、3 つの角は $1 + S > 0$ ならばすべて鋭角、$1 + S = 0$ ならばすべて直角、$1 + S < 0$ ならばすべて鈍角である。 ■

検算

- $\mathbf{x} = (3, 0, 0)$、$\mathbf{y} = (0, 4, 0)$ とする。すると $\mathbf{b} = (12, 12, 0)$ であり、これは直角を二等分する。$\lambda = \frac{1}{7}$ とすると $B = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0)$ を得て、これは $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 上にあり、$XB : BY = 3 : 4$ である。
- 小問 (ii) の 3 つの場合はどれも実際に起こる。P、Q、R が平面上で互いに 120° ずつ開いて配置されていれば、$S = -\frac{3}{2}$ であり、二等分線どうしは 120°（鈍角）で交わる。$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ が O を中心とする正四面体（regular tetrahedron）の 3 つの頂点を指すならば、各内積は $-\frac{1}{3}$ であるから $S = -1$ となり、3 つの角はすべて直角である。ほぼ平行な 3 つのベクトルでは鋭角になる。
- 両方の小問の結果は、何千通りものランダムな配置についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $\cos\theta \neq \pm 1$ を使う必要があることを忘れる。(i)(c) の因数 $1 + \cos\theta$ と、一意性の議論における因数 $1 - \cos\theta$ が 0 でないのは、点が同一直線上にないからにほかならない。
- 小問 (ii) で、二等分ベクトルを $|\mathbf{x}|\mathbf{y} + |\mathbf{y}|\mathbf{x}$ のような特定のベクトルとして扱ってし

まう。問題文ではそれらを自由に選んでよいとしているので、それらがこうしたベクトルの正の定数倍であると言うには小問 (i)(a) を引用しなければならない。

STEP のその先へ

ベクトルを $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ と書いて単位ベクトルで考える習慣は、線形代数（linear algebra）の全体を通じて役に立つ。(ii) の恒等式は、$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ のグラム行列（*Gram matrix*）、すなわち成分がそれらの対ごとの内積である行列の幾何学の小さな一断面である。$|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}|^2 = 3+2S \geq 0$ であることから $S \geq -\frac{3}{2}$ がわかり、鈍角の場合には限界がある。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、内積、射影、グラム行列をこの精神で展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。