解答例

STEP II 2024、第 3 問

純粋数学 ・ 半角の正接による置換

> **STEP II 2024、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) では一種の「辞書」をつくる。円周上の角 ϕ の位置にある点に、N からその点を通る直線が y 軸と交わる高さ $\tan\frac{1}{2}\phi$ を対応させるのである。これを逆向きにもたどり、どの高さ q にも円周上の点がちょうど一つ対応するようにする。すると、問題に現れる q の各関数は $\frac{1}{2}\theta$ に関する三角関数の恒等式（identity）となり、角 θ に、したがって点に何が起こるかを読み取ることができる。

解答

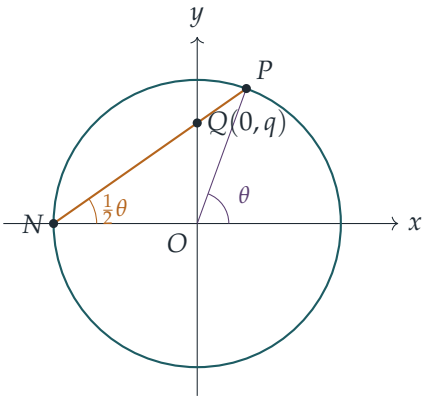
小問 (i)

$P \neq N$ であるから $\cos\theta \neq -1$ であり、直線 NP は鉛直ではない。その傾き（gradient）は

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

である。ここで倍角の公式（double-angle formulas）$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ と $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$ を用いた（また $|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$ より $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ である）。この直線は $(-1,0)$ を通るので $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$ であり、$x = 0$ とおくと $q = \tan\frac{1}{2}\theta$ が得られる。これが示すべきことであった。

幾何的には、これは円周角（angle at the circumference）の性質である。P が中心に対して角 θ をなすので、弦（chord）NP は N において x 軸と角 $\frac{1}{2}\theta$ をなす。



逆向きに：高さから点へ

この逆（converse）は何度も必要になる。任意の実数 q に対し、N と $(0,q)$ を通る直線は $y=q(x+1)$ である。これを $x^2+y^2=1$ に代入すると

$$x^2-1+q^2(x+1)^2=0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x-(1-q^2)\right]=0.$$

解 $x=-1$ は N に対応するので、もう一つの交点は

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right).$$

である。$q=\tan\frac{1}{2}\phi$ ならば、t の公式（t-formulas）によりこの点は $(\cos\phi,\sin\phi)$ である。$\phi\mapsto\tan\frac{1}{2}\phi$ は $(-\pi,\pi)$ から $\mathbb{R}$ への全単射（bijection）であるから、次が得られる。

辞書。任意の角 ϕ（$(-\pi,\pi)$ に属するとは限らない）に対して $\tan\frac{1}{2}\phi=q$ ならば、N から $(0,q)$ を通る直線は円と再び $(\cos\phi,\sin\phi)$ で交わる。

これがすべての ϕ について成り立つのは、ϕ を $\phi\pm2\pi$ に置き換えても、$\tan\frac{1}{2}\phi$（$\frac{1}{2}\phi$ について周期 π をもつ）も点も変わらないからである。

小問 (ii)

(a) $\tan\frac{1}{4}\pi=1$ であるから、加法定理（addition formula）により

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{4}\pi\right)=\frac{\tan\frac{1}{2}\theta+1}{1-\tan\frac{1}{2}\theta}=\frac{1+q}{1-q}=f_1(q),$$

となり、これは $\tan\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\pi\right)$ である。これが示すべきことであった。条件 $q\neq1$ は $\theta\neq\frac{1}{2}\pi$ を意味するので、分母は 0 でない。

(b) (a) より、Q_1 の高さは $\phi=\theta+\frac{1}{2}\pi$ として $\tan\frac{1}{2}\phi$ である。辞書により $P_1=$

$\left(\cos(\theta+\frac{1}{2}\pi), \sin(\theta+\frac{1}{2}\pi)\right)$ である。よって

P_1 は、P をO のまわりに反時計回りに回転（rotation）した像であり、回転角は$\frac{1}{2}\pi$.

である。（除外された値 $q=1$ は $\theta=\frac{1}{2}\pi$ に対応し、これはこの回転による像が N そのものになる唯一の点である。）

小問 (iii)

(a) P_2 は角 $\theta+\frac{1}{3}\pi$ の位置にある点である。必要ならば角を $(-\pi, \pi)$ に引き戻して（これは半角の tan を変えない）小問 (i) を適用し、$\tan\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を用いると

$$\mathrm{f}_2(q)=\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{6}\pi\right)=\frac{q+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{q}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}q+1}{\sqrt{3}-q}.$$

条件 $q\neq\sqrt{3}$ は $\theta\neq\frac{2}{3}\pi$ であり、これはちょうど P_2 が N となって直線 NP_2 が存在しなくなる場合である。

(b) 今度は $\tan\frac{1}{4}\pi=1$ を差の形で用いる。

$$\mathrm{f}_3(q)=\frac{1-q}{1+q}=\frac{\tan\frac{1}{4}\pi-\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta}=\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta\right)=\tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\theta\right).$$

辞書により、P_3 は角 $\frac{1}{2}\pi-\theta$ の位置にある点、すなわち $(\sin\theta, \cos\theta)$ である。P の座標が入れ替わっているので

P_3 はP を鏡映（reflection）した点であり、鏡映の軸は直線$y=x$.

である。

(c)

考えてみよう f_2^{-1} は角に何をするか？

(a) より、f_2 はすべての角 ϕ に対して $\tan\frac{1}{2}\phi$ を $\tan\frac{1}{2}(\phi+\frac{1}{3}\pi)$ に移す（計算の中で $\phi=\theta$ は一度も使っていない）。したがって $\mathrm{f}_2\left(\tan\frac{1}{2}(\psi-\frac{1}{3}\pi)\right)=\tan\frac{1}{2}\psi$ であり、f_2 は単射（one-to-one）であるから（$s=\mathrm{f}_2(q)$ を解くと、$s\neq-\sqrt{3}$ のとき一意的に $q=\frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$ が得られる）、

$$\mathrm{f}_2^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\psi\right)=\tan\tfrac{1}{2}\left(\psi-\tfrac{1}{3}\pi\right).$$

となる。つまり f_2^{-1} は角を $\frac{1}{3}\pi$ だけ逆向きに回転させる。

では、三つの段階を通して角を追ってみよう。$0<q<1$ より $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。

- f_2：角は $\theta+\frac{1}{3}\pi \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ となる。このとき $\mathrm{f}_2(q)>0$ であるから、f_3 を適用できる。
- f_3：角は $\frac{1}{2}\pi-(\theta+\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{6}\pi-\theta \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ となる。これは $-\frac{2}{3}\pi$ ではないので、高さは $-\sqrt{3}$ ではなく、f_2^{-1} を適用できる。
- f_2^{-1}：角は $\frac{1}{6}\pi-\theta-\frac{1}{3}\pi=-\theta-\frac{1}{6}\pi$ となる。

よって $\mathrm{f}_4(q)=\tan\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{1}{6}\pi\right)$ であり、辞書により P_4 は角 $-\frac{1}{6}\pi-\theta$ の位置にある点である。

O を通り角 α をなす直線に関する鏡映は、角 θ の位置にある点を角 $2\alpha-\theta$ の位置にある点に移す（鏡となる直線が二つの方向を二等分するからである）。ここでは $2\alpha=-\frac{1}{6}\pi$ であるから

P_4 はP を、O を通り、角 $-\frac{1}{12}\pi$ をx軸の正の向きとなす直線に関して鏡映した点である,

すなわち、その直線は $y=-\tan\frac{1}{12}\pi\, x=-(2-\sqrt{3})\, x$ である。

これは納得のいく結果である。$\frac{1}{3}\pi$ 回転し、$y=x$ に関して鏡映し、逆向きに回転して戻すことは、鏡 $y=x$ を $\frac{1}{3}\pi$ だけ逆向きに回転させた直線に関する鏡映であり、$\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi=-\frac{1}{12}\pi$ となるからである。具体的には、$t=\tan\frac{1}{12}\pi=2-\sqrt{3}$ とおくと

$$\mathrm{f}_4(q)=-\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{12}\pi\right)=-\frac{q+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})q}.$$

検算

- (iii)(b) で $\theta=\frac{1}{2}\pi$ とする。$P=(0,1)$、$q=1$、$\mathrm{f}_3(1)=0$ であるから $Q_3=O$、$P_3=(1,0)$ となり、確かにこれは $(0,1)$ の $y=x$ に関する鏡映である。
- (c) で $q=\frac{1}{2}$ とする。$\mathrm{f}_2(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\approx 1.5146$、次に $\mathrm{f}_3\approx -0.2046$、次に $\mathrm{f}_2^{-1}\approx -0.8868$ となり、閉じた式 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}\approx -0.8868$ と一致する。
- 100 000 個のランダムな点 P についてコンピュータで確かめたところ、上のすべての関係（$\frac{1}{2}\pi$ の回転、f_2 の式、$y=x$ に関する鏡映、角 $-\frac{1}{12}\pi$ の直線に関する鏡映）が丸め誤差の範囲で成り立つことが確認された。

よくある間違い

- P_1 が角 $\theta+\frac{1}{2}\pi$ の位置にあると述べながら、この角が $(-\pi,\pi)$ の外にあるかもしれないことに気づかないこと。これが問題にならないのは、ϕ が 2π だけ変化すると $\tan\frac{1}{2}\phi$ も点も元に戻るからにすぎない。

- (c) で f_2^{-1} の回転を逆の向きに適用する（再び $\frac{1}{3}\pi$ を加えてしまう）こと。こうすると角は $\frac{1}{2}\pi - \theta$ となり、誤って P_4 が P_3 と同じになってしまう。

STEP のその先へ

角 θ の位置にある点を $q = \tan\frac{1}{2}\theta$ に移す写像は、円から直線への**立体射影**（stereographic projection）であり、関数 f_1、f_2、f_3 はメビウス変換（Möbius transformations）$q \mapsto \frac{aq+b}{cq+d}$ である。円のあらゆる回転と鏡映は直線のこのような変換となり、対称変換の合成は 2×2 行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の積に対応する。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この描像を見事に展開し、リーマン球面（Riemann sphere）へと拡張している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。