解答例

STEP II 2024、第 2 問

純粋数学 ・ 級数と積分

> **STEP II 2024、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は、積分 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$ をすべて級数（series）に書き換えるものである。したがって、同じ材料から組み立てた級数は、どれもこれらの積分の組合せとして表せる。(ii) や (iii) の級数の値を求めるには、括弧の中身を $1/(3k+m+1)$ の形の項に分け、対応する被積分関数（integrand）を一つの分数にまとめ直してから積分すればよい。こうして得られる積分が計算できるのは、因数分解（factorisation）$8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$ のおかげである。

解答

以下、全体を通して

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

とおく。

小問 (i)

因数 8 をくくり出し、$|u|<1$ のときの $(1+u)^{-1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k u^k$ を $u=x^3/8$ として用いると、

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\Big(1+\frac{x^3}{8}\Big)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

これが成り立つのは $|x^3/8|<1$、すなわち $|x|<2$ のときである。

次に x^m を掛け、$[0,1]$ 上で項別に積分する。この区間は展開が成り立つ範囲に含まれ

ている（また、収束については気にしなくてよいと問題文に書かれている）。

$$I_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \cdot \frac{1}{3k+m+1},$$

ここで $n = 3k+m \geq 0$ に対して $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$ であることを用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)

三つの分母 $3k+3$、$3k+2$、$3k+1$ は、それぞれ $m = 2, 1, 0$ としたときの $3k+m+1$ である。よって小問 (i) により、この級数は

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 4}{8 + x^3}\,\mathrm{d}x.$$

に等しい。

考えてみよう なぜ $x^2 - 2x + 4$ が何かと約分できるはずなのだろうか？

それは $8 + x^3$ が二つの立方の和だからである。$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ に $a = x$、$b = 2$ を代入すると

$$8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

が得られる。したがって被積分関数は $\dfrac{1}{x+2}$ と簡単になり、級数は $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$ に等しい。これで示すべきことが示された。最後に、

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

小問 (iii)

まず括弧の中身を k についての部分分数（partial fractions）に分解する。$2k+1 = \alpha(3k+2) + \beta(3k+1)$ とおく。$k = -\frac{1}{3}$ を代入すると $\frac{1}{3} = \alpha$、$k = -\frac{2}{3}$ を代入すると $-\frac{1}{3} = -\beta$ となるので $\beta = \frac{1}{3}$ である。したがって

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

であり、小問 (i)（$m = 0$ と $m = 1$ の場合）により、この級数は

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}\,\mathrm{d}x.$$

に等しい。次に、この被積分関数を部分分数に分解する。

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4},$$

とおくと

$$1+x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2).$$

である。$x=-2$ を代入すると $-1=12A$ となり、$A=-\frac{1}{12}$ である。x^2 の係数を比較すると $0=A+B$ となり、$B=\frac{1}{12}$ である。定数項を比較すると $1=4A+2C$ となり、$C=\frac{2}{3}$ である。（x の係数で検算すると、$-2A+2B+C=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=1$ となり合っている。）24 を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2}+\frac{2x+16}{x^2-2x+4}\\ &= -\frac{2}{x+2}+\frac{2x-2}{x^2-2x+4}+\frac{18}{(x-1)^2+3},\end{aligned}$$

となる。ここでは、2 次式の導関数 $2x-2$ を分子から切り離し、残りの部分で平方完成（completing the square）を行った。

各部分を $[0,1]$ 上で積分する。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3+2\ln 2,\\ \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3-2\ln 2,\\ \int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1\\ &= 6\sqrt{3}\Big(0-\arctan(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

最後の行では、$u=x-1$、$c=\sqrt{3}$ として $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2}=\frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$ を用いた。三つの部分を足し合わせると $\ln 2$ の項は打ち消し合い、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3}-\ln 3,$$

となる。よって $a=3$、$b=3$ である。

検算

- これらの級数は非常に速く収束する（各項の大きさは前の項の高々 8 分の 1 である）ので、最初の数項を計算するだけでよい検算になる。(ii) では、級数の最初の 3 項から $0.41667-0.01198+0.00084\approx 0.40553$ が得られ、$\ln\frac{3}{2}\approx 0.40547$ とよく一致する。
- (iii) では $\pi\sqrt{3}-\ln 3\approx 5.4414-1.0986=4.3428$ である。級数の最初の 200 項をコンピュータで足し合わせると、小数第 12 位まで一致する。$k=0$ の項だけでも $\frac{1}{8}\cdot 36=4.5$ となり、大きさの見当は合っている。

よくある間違い

- 展開を $8^{-(k+1)}$ ではなく 8^{-k} で書いてしまうこと。最初にくくり出した因数 $\frac{1}{8}$ を落としてはならない。
- $\frac{1}{3k+3}$ を I_2 ではなく I_3 に対応させてしまうこと。分母は $3k+m+1$ なので、m は定数項より 1 小さい。
- $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が負であることを忘れ、$\pi\sqrt{3}$ の項の符号を誤ること。

STEP のその先へ

小問 (i) のように和と積分の順序を入れ替えることがここで正当化されるのは、冪級数（power series）が $[0,1]$ 上で一様収束（uniform convergence）するからである。このような入れ替えがいつ許されるかは、大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的なテーマの一つである。同じ方法を使えば、$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ の値も、小問 (iii) とまったく同様にして求められる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）では、一様収束と項別積分（term-by-term integration）が丁寧に解説されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。