解答例

# STEP II 2024、第 10 問

力学 ・ 加速するくさび上の摩擦

**STEP II 2024、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

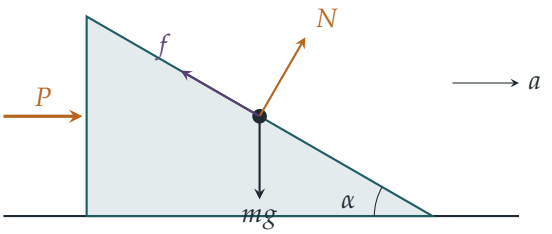
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

すべては二つの観察にかかっている。第一に、平面はなめらかなので、系全体（三角柱と質点）にはたらく水平方向の外力は $P$ だけである。これにより共通の加速度がただちに求まる。第二に、質点は三角柱に対して動かないので、質点もまったく同じ水平方向の加速度をもつ。したがって、質点だけについて斜面に平行な方向と垂直な方向に力を分解すれば、摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）が直接求まる。(iii) の不等式は、結局「摩擦力 $\leq \mu\times$ 垂直抗力」を加法定理（compound-angle formulae）で整理したものにすぎない。

## 解答

質点を質点として、三角柱（prism）をなめらかな水平面上をすべる剛体（rigid body）としてモデル化し、質点と斜めの面との接触は摩擦係数 $\mu$ のあらい面とする。鉛直な面を左側に置き、斜めの面が右下がりになるようにする。このとき $P$ は三角柱を右向きに押す。




質点には、重力 $mg$、斜めの面に垂直な垂直抗力 $N$、そして摩擦力がはたらく。摩擦力

は斜面に沿って**上向き**にはたらく符号つきの量 $f$ として扱う（$f$ が負になれば、摩擦力は実際には斜面に沿って下向きにはたらいている）。摩擦力の大きさは $F = |f|$ である。

### 小問 (i)

系が釣り合い（equilibrium）の状態にあり、すべてが静止していると仮定する。質点について斜面に垂直な方向と平行な方向に力を分解すると、

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

質点がすべらないためには $|f| \le \mu N$、すなわち $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$、つまり $\mu \ge \tan\alpha$ が必要である（$\alpha$ は鋭角なので $mg\cos\alpha > 0$ で割ってよい）。したがって $\mu < \tan\alpha$ ならば釣り合いは不可能であり、質点は必ずすべる。

### 小問 (ii)

**加速度**。三角柱と質点をまとめて考える。平面はなめらかなので、平面は鉛直方向の力しか及ぼさない。質点と三角柱の間の力は内力である。よって水平方向の外力は $P$ だけであり、両者は同じ加速度 $a$（水平右向き）をもつので、

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

**質点についての力の分解**。質点の加速度は水平方向に $a$ である。その斜面に沿って上向きの成分は $-a\cos\alpha$（斜面は左に向かって上がり、質点は右向きに加速する）であり、外向き法線方向の成分は $a\sin\alpha$ である。

> ? **考えてみよう** なぜ水平・鉛直方向ではなく、斜面に平行・垂直な方向に分解するのか。

斜面に平行な方向に成分をもつのは $f$ と重力だけであり、斜面に垂直な方向に成分をもつのは $N$ と重力だけである。したがって各方程式には未知数が一つしか含まれず、連立方程式を解かずに済む。その代わりに加速度も分解しなければならないが、これは簡単である。

斜面に沿って上向き：

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

$a = P/(M+m)$ を代入すると、

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

となり、摩擦力の大きさは

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

であり、これが示すべき式である。絶対値は本当に必要である。$P$ が小さいときは摩擦力は斜面に沿って上向きにはたらくが、$P$ が大きいときは斜面が質点に強く押しつけられるため、質点が斜面をはい上がるのを止めるには摩擦力が斜面に沿って下向きにはたらかなければならない。

斜面に垂直な方向（外向き法線）：

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

$P > 0$ かつ $\alpha$ は鋭角なので、これは正である。よって絶対値は不要であり、質点は面から離れない。

**小問 (iii)**

質点が三角柱に対して静止し続けるのは、必要な摩擦力を供給できるとき、すなわち $F \le \mu N$ のときであり、かつそのときに限る。$G = (M+m)g$ とおき、正の因数 $m/(M+m)$ を約すと、

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

$\cos\lambda > 0$ を掛けると、これは次の二つの不等式の組になる。

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

**考えてみよう** これらはどのようにして $\alpha \pm \lambda$ の正接になるのか。

$G$ の項を一方の辺に、$P$ の項をもう一方の辺に集める。すると各括弧は加法定理による展開の形になる。

**右側の不等式**（斜面に沿って上向きの摩擦力が限界を超えてはならない）：

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

$0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$ より $\cos(\alpha-\lambda) > 0$ なので、これは $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$ となる。

**左側の不等式**（斜面に沿って下向きの摩擦力が限界を超えてはならない）：

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

ここで条件 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ を用いる。これより $0 < \alpha + \lambda < \frac{1}{2}\pi$ なので $\cos(\alpha+\lambda) > 0$ であり、割り算をして $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$ を得る。

両方が成り立たなければならないので、

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

となり、示すべき式が得られた。

## 検算

- $P = 0$ のとき、下限の条件は $0 \ge G\tan(\alpha-\lambda)$ となるが、$\lambda < \alpha$ なのでこれは成り立たない。$\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$ であるから、これは小問 (i) と整合する。
- $P = G\tan\alpha$ のとき $f = 0$ となる。これは、なめらかな面上の質点がちょうど静止していられる押し方であり、よく知られた「加速するくさび」の結果 $a = g\tan\alpha$ である。この値は、当然ながら区間の内部にある。
- 数値で確かめる。$M = 3$、$m = 1$、$g = 9.8$、$\alpha = 30^\circ$、$\lambda = 10^\circ$ とすると、許される範囲は $14.27 \le P \le 32.89$（ニュートン）である。$P = 20$ のとき、公式から $F \approx 0.570$、$N \approx 10.99$ となり、$F/N \approx 0.052 < \tan 10^\circ \approx 0.176$ である。数千通りのランダムな場合について質点の運動方程式をコンピュータで直接解いた結果も、両方の公式および区間と一致する。

## よくある間違い

- 小問 (ii) で $N = mg\cos\alpha$ としてしまう。斜面は加速しているので、垂直抗力は静止しているときの値とは異なる。
- 絶対値を落として $P$ の下限しか求めない。上限は、摩擦力が斜面に沿って**下向き**にはたらく場合から得られる。
- $\cos(\alpha+\lambda)$ が正であることに触れずにこれで割ってしまう。まさにここで $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ が使われる。

## STEP のその先へ

より見通しのよい方法は、加速度 $a$ で加速する三角柱の座標系で考えることである。その座標系では、質点には後ろ向きに余分な「見かけの」力、すなわち慣性力（fictitious force）$ma$ がはたらき、問題は、実効的な重力が角 $\arctan(a/g)$ だけ傾いた、あらい斜面上の通常の静力学の問題になる。すると条件は、この傾きが $\alpha$ から摩擦角（angle of

friction）$\lambda$ 以内になければならないということになり、これはまさに求めた区間である。非慣性系（non-inertial frame）と慣性力については、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。