解答例

STEP II 2024、第 1 問

純粋数学 • 連続する整数の和

> **STEP II 2024、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

鍵となる考え方

両辺はともに等差数列の和（arithmetic series）であるから、それぞれ（項数）×（項の平均）である。これらを等しいとおくと、n、k、c の間の 2 次の関係式が 1 つ得られ、問題の残りはこの関係式についての整数論（number theory）である。k を固定すれば c について解くのは易しく、偶奇（parity）や余りによって c が正の整数となるのはいつかが決まる。代わりに $c = 1$ と固定するとペル方程式（Pell equation）の形の方程式が得られ、(iv)(b) の写像は既知の解から新しい解を作る標準的な方法である。

解答

小問 (i)

c から始まる $n + k$ 個の整数は $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$ である。その和は

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

続く n 個の整数は $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$ であり、その和は

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

両方の和を 2 倍して展開すると、

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

引き算すると $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$ である。よって

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

どの段階も逆にたどることができる（展開し、2 倍し、移項しただけである）から、和が等しいことは $2n^2+k=2ck+k^2$ と同値であり、これが示すべきことであった。

小問 (ii)

(a) $k=1$ のとき条件は $2n^2+1=2c+1$ となるので、$c=n^2$ である。これはすべての n に対して正の整数であるから、**すべての**正の整数 n が条件を満たし、そのとき $c=n^2$ である。（例えば $n=2$ のとき $4+5+6=7+8$ である。）

(b) $k=2$ のとき条件は $2n^2+2=4c+4$、すなわち

$$n^2=2c+1, \qquad c=\frac{n^2-1}{2}.$$

c が整数であるためには n^2 が奇数、したがって n が奇数でなければならない。c が正であるためには $n^2>1$ が必要であり、これにより $n=1$ は除外される。逆に、奇数で $n\geq 3$ ならば常に正の整数 c が得られる。よって可能な値は

$$n\in\{3,5,7,\dots\}, \qquad c=\tfrac{1}{2}(n^2-1).$$

$n=3$、$c=4$ の場合は等式 $4+5+6+7+8=9+10+11$ である。

小問 (iii)

$k=4$ のとき条件は $2n^2+4=8c+16$、すなわち

$$n^2=4c+6=4(c+1)+2.$$

よって n^2 を 4 で割った余りは 2 となるはずである。しかし平方数の余りは 0 か 1 である。実際、$n=2m$ ならば $n^2=4m^2$ であり、$n=2m+1$ ならば $n^2=4(m^2+m)+1$ である。したがって解は存在しない。

小問 (iv)

$c=1$ のとき条件は $2n^2+k=2k+k^2$、すなわち

$$2n^2=k(k+1). \qquad (*)$$

言い換えれば $n^2=\frac{1}{2}k(k+1)$ であり、平方数でもある三角数（triangular number）を求めればよい。

(a) 小さい k で試してみる。$k=1$ のとき $2n^2=2$ なので $n=1$ である。次に $k=2,\dots,7$ では $k(k+1)/2=3,6,10,15,21,28$ となり、いずれも平方数ではない。そして $k=8$ のとき $2n^2=72$ なので $n=6$ である。よって 2 つの可能性は

$$k=1,\ n=1 \qquad \text{および} \qquad k=8,\ n=6.$$

（2 つ目を確かめよう：$1+2+\cdots+14=105$ であり、$15+16+\cdots+20=105$ である。）

(b) $2N^2=K^2+K$ と仮定する。$N'=3N+2K+1$、$K'=4N+3K+1$ とおく。すると

$$\begin{aligned}2N'^2&=2(9N^2+4K^2+1+12NK+6N+4K)\\&=18N^2+8K^2+24NK+12N+8K+2,\\K'^2+K'&=(16N^2+9K^2+1+24NK+8N+6K)+(4N+3K+1)\\&=16N^2+9K^2+24NK+12N+9K+2.\end{aligned}$$

引き算すると、仮定を用いて

$$2N'^2-(K'^2+K')=2N^2-K^2-K=0,$$

となる。よって $2N'^2=K'(K'+1)$ である。N と K は正の整数であるから N' と K' も正の整数であり、$(*)$ と小問 (i) により、N' は n の取りうる値で、対応する値は $k=K'$ である。

? 考えてみよう これらの奇妙な式はどこから来たのだろうか？

$(*)$ に 4 を掛けて 1 を加えると、$(2k+1)^2-8n^2=1$ となる。$x=2k+1$、$y=n$ とおくと、これはペル方程式 $x^2-8y^2=1$ であり、その解は $x+y\sqrt{8}$ に最小解 $3+\sqrt{8}$ を掛けることで次々に生成される。$(x+y\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=(3x+8y)+(x+3y)\sqrt{8}$ と書き、k と n に戻すと、ちょうど $N'=3N+2K+1$ および $2K'+1=3(2K+1)+8N$、すなわち $K'=4N+3K+1$ が得られる。

(c) 写像を $(N,K)=(1,1)$ に適用しても $N'=6$、$K'=8$、すなわち (a) の 2 つ目の解が得られるだけである。$(N,K)=(6,8)$ に適用すると

$$N'=18+16+1=35,\qquad K'=24+24+1=49,$$

となり、さらに $(35,49)$ に適用すると

$$N'=105+98+1=204,\qquad K'=140+147+1=288.$$

となる。よって、さらに 2 つの解は

$$k=49,\ n=35\qquad\text{および}\qquad k=288,\ n=204.$$

実際、$2\cdot35^2=2450=49\cdot50$ であり、$2\cdot204^2=83232=288\cdot289$ である。

検算

- 冒頭の例は $n=3$、$k=2$、$c=4$ であり、$2\cdot 9+2=20=2\cdot 4\cdot 2+4$ であるから (i) の関係式を満たし、$c=\frac{1}{2}(9-1)$ として (ii)(b) にも当てはまる。
- $n,k<40$ かつ $c<200$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、2 つの和が一致するのはちょうど $2n^2+k=2ck+k^2$ のときであることが確認された。また、$c=1$ かつ $n,k<400$ での探索では $(k,n)=(1,1),(8,6),(49,35),(288,204)$ のみが見つかり、(iv) と一致した。
- (iv)(b) において、(N,K) から (N',K') への操作は**任意の** N、K に対して量 $2N^2-K^2-K$ を保つことに注意しよう。これは小さい数で計算を手早く確かめる方法になる。例えば $N=K=0$ とすると $N'=K'=1$ となり、どちらの値も 0 である。

よくある間違い

- (ii)(b) に $n=1$ を含めてしまう。これは $c=0$ を与え、正の整数ではない。
- (i) で 2 つ目のまとまりの始まりを数え間違える。始まりは $c+n+k$ であり、$c+n+k+1$ ではない。
- (iv)(c) で再び $k=8$、$n=6$ を答えてしまう。これは写像の最初の出力であるが、(a) ですでに見つかっている。

STEP のその先へ

方程式 $x^2-8y^2=1$ はペル方程式であり、平方数でない任意の d に対して、$x^2-dy^2=1$ の解はすべて、数 $x+y\sqrt{d}$ の積を通じて、ただ 1 つの基本解（fundamental solution）のべきから得られる。これは $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ のような環における単数（unit）を初めて垣間見るものであり、単数は代数的整数論（algebraic number theory）の中心的な話題である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、連分数（continued fraction）を用いてペル方程式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。