解答例

STEP III 2023、第 9 問

力学 ・ 糸でつながれた 2 粒子の運動

STEP III 2023、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

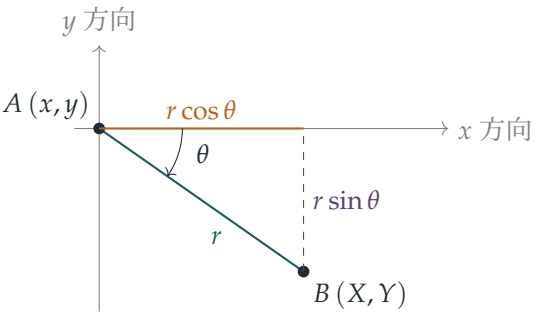
系の状態を、A の位置と糸の向き θ によって記述する。張力（tension）は糸に沿ってのみはたらくので、各質点の加速度は糸に垂直な成分をもたない。そこで二つの質点の垂直方向の加速度を比較すると、$\ddot{\theta} = 0$ が導かれる。すなわち、糸は一定の割合で回転する。その後は運動量保存（conservation of momentum）を用いれば解き終えられる。

解答

以下を通じて、質点はなめらかな水平面上を運動し、糸は軽く伸び縮みしないものとする。また（仮定してよいとおり）糸は常にたるまないので、つねに $AB = r$ である。

小問 (i)

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の長さは r である。θ は x 軸の正の向きから**時計回り**に測るので、図のように $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、このベクトルは x 方向より下を向く。



A から B へ進むとき、x 方向に $r\cos\theta$、y の**負の**向きに $r\sin\theta$ だけ移動するので、

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

$(\cos\theta, -\sin\theta)$ は x 軸から時計回りに角 θ をなす単位ベクトルであるから、同じ式はすべての θ について成り立つ。

小問 (ii)

t で微分する（r は定数、θ は t の関数である）と、

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

小問 (iii)

張力 T は A を単位ベクトル $(\cos\theta, -\sin\theta)$ の向きに B の方へ引き、B を $(-\cos\theta, \sin\theta)$ の向きに A の方へ引く。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より、

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

したがって

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

であり、まったく同様にして $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$ である。それぞれ m と M で割れば、求める二つの結果が得られる。（幾何学的には、$(\sin\theta, \cos\theta)$ は糸に垂直であり、どちらの質点もその方向には加速しない、ということである。）

> **考えてみよう** 「垂直方向の加速度はない」という二つの式が得られた。これらから θ について何がわかるのだろうか。

第 2 式から第 1 式を引き、$\ddot{X} - \ddot{x}$ と $\ddot{Y} - \ddot{y}$ に小問 (ii) の式を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= (-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta + (-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

$r \neq 0$ であるから $\ddot{\theta} = 0$ となり、$\dot{\theta}$ は定数である。

この定数を求めるために初期条件（initial conditions）を用いる。$t = 0$ において B は A に対して $(r, 0)$ の位置にあるので、$\theta(0) = 0$ である。また $\dot{y}(0) = u$、$\dot{Y}(0) = 0$ であるから、小問 (ii) の $\dot{Y}$ の式より

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

（$\dot{X}$ の式とも矛盾しない：$0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$。）よってすべての t について $\dot{\theta} = u/r$ であり、$\theta(0) = 0$ のもとで積分すると

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

となり、求める結果が得られた。

小問 (iv)

小問 (iii) の運動方程式（equations of motion）を組ごとに足し合わせると、

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

これは運動量保存を表している。張力は系の内力なのである。第 2 式を一度積分すると $m\dot{y} + M\dot{Y}$ は定数であり、その値は初期値 $mu + M\cdot 0 = mu$ に等しい。$y(0) = Y(0) = 0$ のもとでもう一度積分すると、

$$my + MY = mut.$$

小問 (v)

小問 (i) の $Y = y - r\sin\theta$ と小問 (iii) の $\theta = ut/r$ を代入すると、

$$my + M\Big(y - r\sin\frac{ut}{r}\Big) = mut \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{m+M}\Big(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\Big),$$

となり、これが求める結果である。

小問 (vi)

小問 (v) の結果を微分すると、

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\Big(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\Big) = \frac{u}{m+M}\Big(m + M\cos\frac{ut}{r}\Big).$$

糸が半回転した時刻 $t = \pi r/u$ では $\cos(ut/r) = -1$ であり、

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

となる。これは $M > m$ のとき（$u > 0$ なので）負である。したがってその瞬間、A の速度の y 成分は負であり、連続性（continuity）によりその前後のある時間区間においても負である。

検算

- $t = 0$ では、小問 (v) の式から $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$ となり、A の初速度と一致する。

- x 方向に同じ方法を用いると $mx + MX = Mr$ が得られ、$x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$ となる。小問 (v) と合わせると、重心（centre of mass）は y 方向に速さ $mu/(m+M)$ で直線運動し、二つの質点はその周りを角速度（angular speed）u/r で回る、というおなじみの描像になる。このとき張力は定数 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$ であるから、糸は確かにたるまない。
- $M \to \infty$ とすると B は静止したままとなり、小問 (v) から $y = r\sin(ut/r)$ が得られる。すなわち A は B を中心とする半径 r の円を描き、当然の結果となる。
- $m = 1$、$M = 3$、$u = r = 1$ として、二つの質点を非常に硬いばねでつないだ系をコンピュータでシミュレーションすると、$t = \pi$ において $y \approx 0.7854$、$\dot{y} \approx -0.5000$ となり、$\frac{\pi}{4}$ および $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$ と一致した。

よくある間違い

- 時計回りという約束による符号の誤り。$Y = y - r\sin\theta$ であるから、$\dot{Y}$ には $+$ ではなく $-r\dot{\theta}\cos\theta$ が現れる。
- 定数 u/r の根拠を示し忘れること。これは A の速さだけから出てくるのではなく、$\dot{Y}(0) = 0$ から得られる。
- 小問 (vi) で、具体的な時刻を示さずに「いずれ」$\dot{y} < 0$ となると主張すること。$t = \pi r/u$ とすれば確定した時刻が得られる。

STEP のその先へ

これは最も単純な形の二体問題（two-body problem）である。運動は、重心の等速運動と、重心に対する相対運動とに分かれ、後者は換算質量（reduced mass）$mM/(m+M)$ によって支配される。同じ分解が惑星の軌道や二原子分子の振動の根底にある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心座標と換算質量を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。