解答例

STEP III 2023、第 8 問

純粋数学 • 区分的な微分方程式

STEP III 2023、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

絶対値（modulus）によって方程式は非線形（non-linear）になるが、その度合いは穏やかである。y' の符号が一定である区間では、$|y'|$ は単に y' か $-y'$ であり、方程式は通常の定数係数（constant-coefficient）の方程式になる。そこで y' が零になるまで解を追い、そこでもう一方の線形方程式に切り替え、つなぎ目で y と y' を一致させる。小問 (iv) は手間を省く工夫である。解を $x \mapsto c - x$ で反転させると 1 階導関数の項の符号が反転し、これはまさに 2 つの線形方程式の間の切り替えにあたる。

解答

小問 (i)

$\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ とすると、

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

よって、

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = [(x-2) + 2(1-x) + x]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

がすべての実数 x について成り立つ。また $\mathrm{f}(0) = 0$ かつ $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$ であり、条件を満たしている。

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ より、$\mathrm{f}'(x)$ の符号は $1 - x$ の符号に等しく、これは $x \leq 1$ で ≥ 0 である。よって $x \leq 1$ で $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ である。

小問 (ii)

$x \leq 1$ では $\mathrm{f}' \geq 0$ なので $|\mathrm{f}'| = \mathrm{f}'$ であり、(ii) の方程式は (i) の方程式と同じになる。したがって f は $x \leq 1$ で新しい方程式とその初期条件（initial conditions）を満たし、

$$\mathrm{g}_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

つなぎ目では $\mathrm{g}_1(1) = \mathrm{e}^{-1}$、$\mathrm{g}_1'(1) = 0$ である。連続微分可能性（continuous differentiability）から、g_2 も同じ値から出発しなければならない：$\mathrm{g}_2(1) = \mathrm{e}^{-1}$、$\mathrm{g}_2'(1) = 0$。

考えてみよう $x = 1$ の直後で y' はどちらの符号をとるか？

$x = 1$ において方程式から $y'' = -2|y'| - y = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ となるので、y' は減少しながら 0 を通過し、$x = 1$ を少し越えたところでは負である。そこでは $|y'| = -y'$ となり、方程式は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

特性方程式（auxiliary equation）$m^2 - 2m + 1 = 0$ は重解 $m = 1$ をもつので、$\mathrm{g}_2(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^x$、$\mathrm{g}_2'(x) = (A + B + Bx)\mathrm{e}^x$ である。$x = 1$ における条件から

$$(A + B)\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad (A + 2B)\mathrm{e} = 0,$$

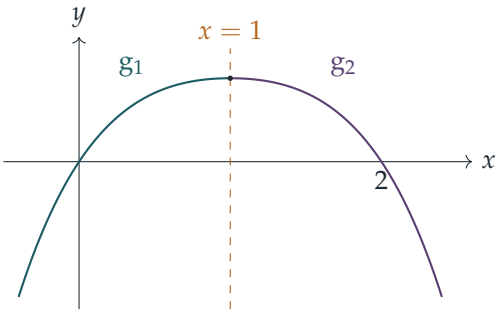
となるので、$B = -\mathrm{e}^{-2}$、$A = 2\mathrm{e}^{-2}$ である。したがって

$$\mathrm{g}_2(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2}.$$

これが仮定 $y' \leq 0$ と矛盾しないことを確かめなければならない：すべての $x \geq 1$ に対して $\mathrm{g}_2'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x-2} \leq 0$ である。よって $x \geq 1$ 全体で $|\mathrm{g}_2'| = -\mathrm{g}_2'$ であり、g_2 は確かに $x \geq 1$ 全体で絶対値を含む方程式を満たす。

小問 (iii)

g_1 において x を $2 - x$ に置き換えると $(2 - x)\mathrm{e}^{-(2-x)} = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{g}_2(x)$ となる。よって $\mathrm{g}_2(x) = \mathrm{g}_1(2 - x)$ であり、曲線 $y = \mathrm{g}_2(x)$ は $y = \mathrm{g}_1(x)$ を直線 $x = 1$ に関して対称移動（reflection）したものである。



小問 (iv)

$Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$ とおき、$u = c - x$ と書く。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$ であるから、合成関数の微分法（chain rule）により

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

よって

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

であり、$r \le u \le s$ のときは k がそこで元の方程式の解であるから、右辺は零である。ここで $r \le c - x \le s$ は

$$c - s \le x \le c - r,$$

と同値であるから、$y = \mathrm{k}(c-x)$ は区間 $[c-s, c-r]$ で $y'' - py' + qy = 0$ を満たす。

これで (iii) が説明できる：$p = 2$、$q = 1$、$\mathrm{k} = \mathrm{g}_1$（$(-\infty, 1]$ 上）、$c = 2$ とすると、反転した関数 $\mathrm{g}_1(2-x)$ は $[1, \infty)$ で $y'' - 2y' + y = 0$ を満たす。

小問 (v)

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ とすると、

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

であるから、$\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ である。（2 つ目の形から、与えられているとおり $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ で $\mathrm{h}' \ge 0$ であること、そして後で必要になる $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$ もわかる。）

方針は小問 (ii) と同じである。$y' \le 0$ である区間では方程式は $y'' - 2y' + 2y = 0$ であり、$y' \ge 0$ である区間では $y'' + 2y' + 2y = 0$ であって、h はこれを満たす。

(a) $x = \frac{1}{4}\pi$ において $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$ かつ $y' = 0$ であるから、$y'' = -2y < 0$ となり、y' は負に転じる。したがって $y'' - 2y' + 2y = 0$ の解が必要であり、$p = q = 2$ とした小問 (iv) がそれを与えてくれる：$y = \mathrm{h}(c-x)$ は $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$ で解となる。$c = \frac{1}{2}\pi$ と選ぶとこの区間はちょうど $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ となり、

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

考えてみよう これが単なる一つの解ではなく、求める解であることはどうしてわかるか？

まず、つなぎ目で一致する：$\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$ であり、その導関数 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$ は $x = \frac{1}{4}\pi$ で $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$ に等しい。よってそこで y と y' は連続である。また、仮定

とも矛盾しない：$x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ に対して $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ であり、そこでは $\mathrm{h}' \geq 0$ であるから、$y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \leq 0$ となり、区間全体で $|y'| = -y'$ である。ある点での y と y' の値を与えた線形方程式の解はただ一つであるから、これが求める接続（continuation）である。よって $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ において

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

(b) $x = \frac{5}{4}\pi$ において $y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$ であり、$y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$ である。このとき $y'' = -2y > 0$ であるから y' は正に転じ、方程式は $y'' + 2y' + 2y = 0$ に戻る。

この方程式は定数係数であるから、解を平行移動したものもまた解である。$\sin(x - 2\pi) = \sin x$ より、関数 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$ はこの方程式の解である。また $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$ 上ではその引数 $x - 2\pi$ は $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ を動き、そこでは $\mathrm{h}' \geq 0$ であるから、$y' \geq 0$ と矛盾しない。$x = \frac{5}{4}\pi$ でのつなぎ目を確かめると

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

であり、どちらも一致する。よって $\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{9}{4}\pi$ において

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

$x = \frac{9}{4}\pi$ においてこれは $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$ となり、導関数は零である。つまり解は $\frac{1}{4}\pi$ のときと同じ状態に戻るので、$x \geq \frac{1}{4}\pi$ において解は周期 2π の周期関数である。

検算

- 各部分は構成上なめらかにつながっているが、直接確かめておく価値はある：$x = \frac{5}{4}\pi$ において (a) と (b) はともに $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$ を与え、傾きは零である。
- $y(0) = 0$、$y'(0) = 1$ から絶対値を含む方程式を数値的に前進させて解くと、$[0, 4]$ 上の $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$ と $[0, \frac{9}{4}\pi]$ 上の (v) の 3 つの部分が 10^{-9} 以内の誤差で再現される。
- (a) を直接微分すると、$y' = \mathrm{e}^{x-\pi/2}(\cos x - \sin x)$、$y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$ となり、確かに $y'' - 2y' + 2y = 0$ が成り立つ。

よくある間違い

- 極値点（turning point）を過ぎても $|y'| = y'$ のままにしてしまう：$x = 1$ より先では f 自身は解ではない。

- 新しい部分が区間全体で、仮定した符号の y' を保つことを確かめ忘れる。
- (iv) で区間を $[r,s]$ と答えてしまう。反転によってこの区間は $[c-s,c-r]$ に写される。

STEP のその先へ

このように、右辺が切り替え面（switching surface。ここでは $y'=0$）を横切るところ以外ではなめらかであるような方程式は、区分的になめらかな系（piecewise-smooth system）あるいは切り替え系（switching system）と呼ばれる。解は線形な部分をつなぎ合わせて構成され、$|y'|$ はリプシッツ連続（Lipschitz）であるから、ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）により解の存在と一意性は依然として成り立つ。(v) における 2π 周期性は、線形の減衰方程式では決して生じえないものである：$E=\frac{1}{2}y'^2+y^2$ とおくと $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x=-2y'|y'|$ となるので、「減衰」項は y が増加する間はエネルギーを奪い、y が減少する間はそれを戻すのである。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は線形の理論と一意性を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。