解答例

STEP III 2023、第 7 問

純粋数学 • 積分の不等式

> **STEP III 2023、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

連続関数（continuous function）の 2 乗の積分は決して負にならず、0 になるのはその関数が恒等的に 0（identically zero）であるときに限る。各小問では $\int (\text{何か})^2$ を含む等式が与えられ、少し変形すると「完全平方の積分が 0 に等しい」という形になる。小問 (i) は (ii) のための道具を与え、(iii) では部分積分（integration by parts）が同じ役割を果たし、(iv) では平方完成（completing the square）によって自分で平方を見つけ出さなければならない。

解答

小問 (i)

左辺の積分で $x = u^2$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ である。x が 0 から 1 まで動くとき $u \geq 0$ も同じ範囲を動き、$\sqrt{x} = u$ である。したがって

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

となる。ただし最後に積分変数（dummy variable）の名前を付け替えた。これが求める結果である。

小問 (ii)

小問 (i) を $\mathrm{f} = \mathrm{g}$ として用いると、与えられた条件は

$$\int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

となる。次に目標の積分を展開し、$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\mathrm{g}(x)-x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

となり、示すべきことが得られた。

考えてみよう 積分が 0 であることから、なぜ「ほとんどの点で」ではなく、すべての点で $\mathrm{g}(x)=x$ が導かれるのだろうか。

$\phi(x) = (\mathrm{g}(x)-x)^2$ とおく。これは（g が連続であるから）連続であり、$\phi(x)\geq 0$ である。ある $c\in[0,1]$ に対して $\phi(c)>0$ であると仮定する。連続性により、c を含み、ある正の長さ δ をもつ区間 $I\subseteq[0,1]$ が存在して、その上で $\phi(x)>\frac{1}{2}\phi(c)$ となる。それ以外の点でも $\phi\geq 0$ であるから

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

となり、矛盾する。よって $0\leq x\leq 1$ を満たすすべての x に対して $\phi(x)=0$、すなわち $\mathrm{g}(x)=x$ である。（連続性は本当に重要である。ただ 1 点でのみ x と異なる関数でも、積分は 0 になってしまう。）

小問 (iii)

$2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$ という項を見ると、部分積分を思い出すはずである。1 の原始関数（antiderivative）として x をとり、$1\cdot\mathrm{h}(x)$ を部分積分すると

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

となる。よって $2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$ であり、条件は

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

となる。これは、g を h' に置き換えた小問 (ii) の条件（小問 (i) を経由して得た形）そのものである。問題の意図どおり h' が連続であることを用いて同じ議論を繰り返すと

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x)-x)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x)=x \text{（範囲は}0\leq x\leq 1.$$

を得る。積分すると $\mathrm{h}(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ であり、$\mathrm{h}(0)=0$ より $C=0$ である。したがって

$$\mathrm{h}(x)=\tfrac{1}{2}x^2.$$

小問 (iv)

まず、条件に $1/a$ が含まれるので $a \neq 0$ であることに注意する。これまでの小問と比べて、交差項が $-2\mathrm{k}(x)$ となるような $\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{p}(x))^2$ の形の平方を探す。展開すると交差項は $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$ となるので、$\mathrm{p}(x)=\mathrm{e}^{-ax}$ とすればよい：

$$\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax})^2 = \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x))^2 - 2\mathrm{k}(x) + \mathrm{e}^{-ax}.$$

$[0,1]$ 上で積分し、最初の 2 項には与えられた条件を、最後の項には $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$ を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax})^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} + \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

となる。左辺は非負の連続関数の積分であるから ≥ 0 であり、右辺は ≤ 0 である。したがって両辺ともに 0 でなければならず、$(a-2)^2=0$、すなわち $a=2$ となる。

$a=2$ のとき、連続で非負の関数 $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-2x})^2$ の積分が 0 であるから、小問 (ii) の議論により、この関数は $[0,1]$ 上のいたるところで 0 となる。$\mathrm{e}^{2x}>0$ であるから

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

を得る。

検算

- 小問 (i) で $\mathrm{f}(x)=x$ とすると、左辺は $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$、右辺は $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ である。
- 小問 (iii)：$\mathrm{h}=\frac{1}{2}x^2$ のとき $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ であり、$2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ である。両者は一致する。
- 小問 (iv)：$a=2$、$\mathrm{k}=\mathrm{e}^{-2x}$ のとき、左辺は $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 0.43233$、右辺は $(1-\mathrm{e}^{-2}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$ であり、同じ値である。また、ランダムな a とランダムな多項式 k に対して、恒等式「左辺 $-$ 右辺 $= \int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}-\mathrm{e}^{-ax})^2 + (a-2)^2/(4a^2)$」をコンピュータで確かめたところ、これも一致した。

よくある間違い

- 連続性と非負性を使わずに、積分が 0 であることから $\mathrm{g}(x)=x$ と結論してしまう。積分が 0 であるというだけでは何もいえない。

- 小問 (iv) で $a \neq 0$ であることを述べ忘れる、あるいは平方完成をする前に k を推測しようとする。

STEP のその先へ

量 $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ は「ベクトル」f と g の内積（dot product）のようにふるまい、$\int_0^1 (g-x)^2\,dx$ は g と x の距離の 2 乗である。各小問は「この距離が 0 である」と述べており、(iv) の重み e^{ax} は重み付き内積（weighted inner product）を与える。この見方（内積空間（inner product space）、およびノルム（norm）が 0 の連続関数は 0 であるという事実）は、大学 1 年次の線形代数と解析学の中心にある。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）および Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の理解）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。