解答例

STEP III 2023、第 6 問

純粋数学 ・ 双曲線関数と単調性

STEP III 2023、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの関数も $\tan^{-1} x$ と $\tanh x$ の定数倍との差であるから、その導関数（derivative）は $\dfrac{1}{1+x^2}$ と $\operatorname{sech}^2 x$ の定数倍との差になる。したがって、すべては $\cosh^2 x$ と $1+x^2$ の比較に帰着する。(i) の不等式（inequality）によって f' の符号が決まり、比 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ が増加することを示せば、それが $\frac{1}{2}\pi$ に等しくなる回数、すなわち g' が 0 になる回数が正確にわかる。

解答

小問 (i)

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$ と $\cosh 2x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$ を用いると、e^x のマクローリン級数（Maclaurin series）から（奇数次の項は打ち消し合って）

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots.$$

を得る。どの項も非負であるから $\cosh 2x \geq 1+2x^2$ であり、したがって

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1+x^2,$$

が成り立つ。等号が成り立つのは $x=0$ のときに限る（$x \neq 0$ ならば x^4 の項は真に正である）。

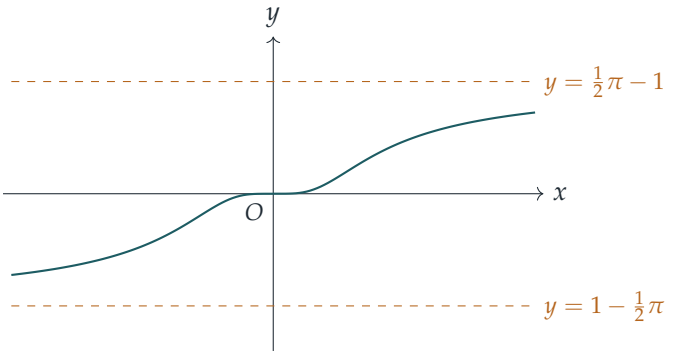
次に微分する。

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$\cosh^2 x \geq 1 + x^2 > 0$ であるから、逆数について $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立ち、すべての x に対して $f'(x) \geq 0$ である。等号は $x = 0$ のときに限る。導関数がただ 1 点を除いて正である関数は（狭義）増加であるから、示すべきことが示された。

概形。グラフに書き込むべき特徴をいくつか挙げる。

- f は奇関数（odd function）であり（$\tan^{-1}$ も tanh も奇関数である）、$f(0) = 0$ である。
- $f'(0) = 0$ であるが f は増加関数であるから、原点は停留変曲点（stationary point of inflection）である。実際、$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ および $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$ であるから、0 の近くでは $f(x) \approx \frac{1}{15}x^5$ となり、グラフはそこで非常に平らである。
- $x \to \infty$ のとき $\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$、$\tanh x \to 1$ であるから、$f(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$ であり、下から近づく。奇関数であることから、$x \to -\infty$ のとき $f(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$ である。



小問 (ii)(a)

ここでは

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

であり、これは連続な偶関数（even function）である。$x = 0$ では $g'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$ である。$x = 2$ では

$$g'(2) = \tfrac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

であり、$\cosh 2 > \frac{1}{2}e^2 > 3.6$ より $\cosh^2 2 > 12.9$ となるから $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$ である。よって $g'(2) > 0$ である。中間値の定理（intermediate value theorem）により g' は $(0,2)$ に零点をもち、g' は偶関数であるから $(-2,0)$ にももう 1 つ零点をもつ。したがって g は少なくとも 2 つの停留点（stationary point）をもつ。

小問 (ii)(b)

$h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$ とおく。すると

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

である。$x \geq 0$ のとき $x\sinh x$ と $x^2\cosh x$ はともに非負（$x > 0$ のときは正）であるから、h は $[0,\infty)$ で増加する。$h(0) = 0$ であるから、$x \geq 0$ に対して $h(x) \geq 0$ であり、実際 $x > 0$ に対して $h(x) > 0$ である。

小問 (ii)(c)

商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x\sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\,h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

である。$x \geq 0$ のとき $\cosh x > 0$ であり、(b) より $h(x) \geq 0$ であるから、この導関数は非負であり、0 になるのは $x = 0$ のときだけである。したがって $\cosh^2 x/(1+x^2)$ は $x \geq 0$ で（狭義）増加である。

小問 (ii)(d)

> **考えてみよう** $\cosh^2 x/(1+x^2)$ についての主張から、どうすれば g' の零点の個数を数えられるだろうか？

$\mathrm{g}'(x) = 0$ の両辺に正の量 $(1+x^2)\cosh^2 x$ を掛けると

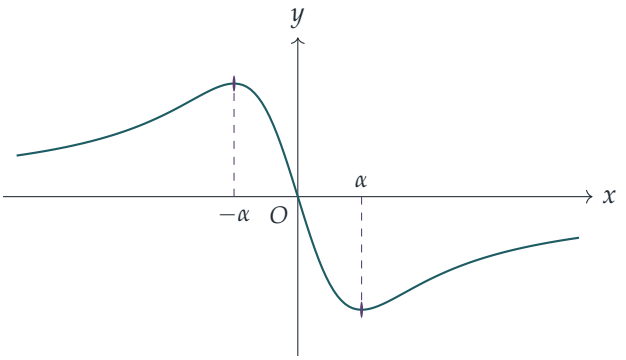
$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

であることがわかる。$R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$ とおく。$[0,\infty)$ 上で R は連続であり、(c) より狭義増加で、$R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$ であるから、そこで値 $\frac{1}{2}\pi$ をとるのは高々 1 回である。(a) より実際にその値をとり、それは $0 < \alpha < 2$ を満たすある α においてである。よって g' は $[0,\infty)$ にちょうど 1 つの零点をもつ。R は偶関数であるから、$x < 0$ における零点は $x > 0$ における零点の符号を変えたものであり、$-\alpha$ にちょうどもう 1 つ零点がある。したがって g はちょうど 2 つの停留点 $x = \pm\alpha$ をもつ（数値的には $\alpha \approx 1.406$）。

小問 (ii)(e)

事実をまとめる。

- g は奇関数であり、$g(0)=0$、$g'(0)=1-\frac{1}{2}\pi<0$ である。
- (d) より、$(-\alpha,\alpha)$ 上では（$R<\frac{1}{2}\pi$ であるから）$g'<0$、$|x|>\alpha$ では $g'>0$ である。よって $x=-\alpha$ で極大、$x=\alpha$ で極小となり、$g(\alpha)=-g(-\alpha)<0$（約 -0.44）である。
- $x\to\infty$ のとき $g(x)\to\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\cdot 1=0$ である。g は (α,∞) 上で極限値 0 に向かって増加するから、そこでは負のままである。すなわち、グラフは x 軸に下から近づく。奇関数であることから、$x\to-\infty$ のとき $g(x)\to 0$ であり、上から近づく。
- したがって g の零点は原点のみであり、$x<0$ では $g>0$、$x>0$ では $g<0$ である。



検算

- $x=1$ において $\cosh^2 1\approx 2.381\geq 2$ であり、(i) と整合する。
- $f(30)\approx 0.537$ であり、$\frac{1}{2}\pi-1\approx 0.571$ に下から近づいている。また $f(0.1)\approx 6.6\times 10^{-7}$ であり、$\frac{1}{15}(0.1)^5$ に近い。
- $\cosh^2 x=\frac{1}{2}\pi(1+x^2)$ を数値的に解くと $\alpha\approx 1.406$ となり、(a) の予測どおり $(0,2)$ の内部にあり、$g(\alpha)\approx -0.440$ である。$[-20,20]$ 上で g' を細かく調べると符号の変化はちょうど 2 回であり、$g(20)\approx -0.050$ は小さな負の値で、概形のとおりである。

よくある間違い

- $\cosh^2 x\geq 1+x^2$ を $\operatorname{sech}^2 x\leq\dfrac{1}{1+x^2}$ に書き換える必要があることを忘れる。この書き換えは両辺が正であるから正しい。
- (d) で正の解が 1 つあることだけを示し、負の解を数えるために偶関数であること（あるいは $x=0$ が解でないこと）を使うのを忘れる。

- g の概形を $y = 0$ 以外の漸近線（asymptote）をもつように描いたり、x が大きいところで再び軸と交わるように描いたりする。(α, ∞) 上での単調性によって、そうはならないことがわかる。

STEP のその先へ

(ii) の方法（「$g' = 0$ の解はいくつあるか？」を「単調関数がある値を何回とるか？」に言い換えること）は、解析学者が根の個数を数えるときの基本的な方法である。連続性と中間値の定理から存在が、狭義単調性から一意性が得られる。これらの考え方は大学最初の解析学（analysis）の講義で厳密に扱われる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、それらが丁寧に扱われる様子を見るのに最適な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。