解答例

STEP III 2023、第 5 問

純粋数学 • 整数論

STEP III 2023、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

各小問では、整数に関する方程式を、因数（factor）が完全にわかっている数（順に 49、pq、$3p^2q$）に等しい積（product）の形に書き換える。一方の辺が 2 つの整数の積になれば、各因数の大きさ（どちらが大きいか、どちらが p より小さいか）によって、可能性は 1 つか 2 つの場合にまで絞られる。小問 (iii) で我々が制御する因数は $p+q-n$ であり、証明を求められている不等式こそが、この因数が p や q と共通因数をもつことを防いでいるのである。

解答

小問 (i)

両辺に $7xy$ を掛けると（2 つの文字はともに 0 でない）、

$$7y+14x=2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy-14x-7y=0.$$

となる。$(2x-7)(y-7)=2xy-14x-7y+49$ であるから、両辺に 49 を加えると、求める式 $(2x-7)(y-7)=49$ が得られる。

次に、x と y を正の整数とする。このとき $2x-7$ と $y-7$ は積が 49 となる整数なので、49 の因数の組（factor pair）である：

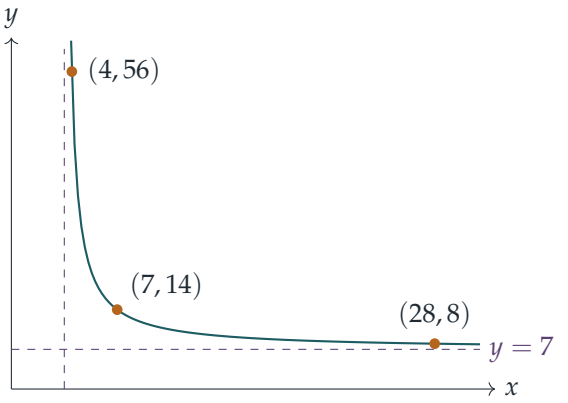
$$(2x-7,\ y-7)\in\{(1,49),\ (7,7),\ (49,1),\ (-1,-49),\ (-7,-7),\ (-49,-1)\}.$$

正であることから負の組は除外される。実際、$x\geq 1$ より $2x-7\geq -5$、$y\geq 1$ より $y-7\geq -6$ であるから、どちらの因数も -7 や -49 にはなりえず、負の組はどれもこ

のいずれかを含む。正の組からは

$$(x, y) = (4, 56), \quad (7, 14), \quad (28, 8),$$

が得られ、いずれも実際にもとの方程式を満たす。たとえば $\frac{1}{4} + \frac{2}{56} = \frac{7}{28} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}$ である。



この曲線は $x = \frac{7}{2}$ と $y = 7$ を漸近線（asymptote）とする直角双曲線（rectangular hyperbola）であり、3 つの解はその正の側の枝の上にある格子点（lattice point）である。

小問 (ii)

展開すると $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = n^2 + pq$ となるので、

$$(p+q+n)(p+q-n) = (p+q)^2 - n^2 = pq.$$

右辺は正であり $p+q+n > 0$ であるから、$p+q-n$ は**正の**整数である。pq の正の約数（divisor）は $1, p, q, pq$（$1, p, p^2$ のみ、ただし $p = q$ のとき）であり、$p+q+n$ はそのいずれかである。しかし $n > 0$ より $p+q+n > p$ かつ $p+q+n > q$ であるから、$p+q+n$ は p でも q でもない。残る約数は pq のみである。よって $p+q+n = pq$ であり、もう一方の因数は

$$p+q-n = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad p+q = n+1.$$

である。

$n = p+q-1$ を $p+q+n = pq$ に代入すると $2p+2q-1 = pq$ となり、これを整理すると

$$pq - 2p - 2q + 4 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (p-2)(q-2) = 3.$$

となる。素数は $p-2 \geq 0$ を満たすので、2 つの因数はともに 0 以上であり、積が 3 であるから $\{p-2, q-2\} = \{1,3\}$ である。したがって

$$(p,q) = (3,5) \quad \text{または} \quad (5,3),$$

であり、実際 $9+15+25 = 49 = 7^2$ で、$n = 7 = 3+5-1$ となっている。

小問 (iii)

ここで n は $p^3+q^3+3pq^2$ の正の実数の立方根（cube root）である。

不等式について。 $p, q > 0$ であるから、

$$n^3 = q^3 + (p^3+3pq^2) > q^3, \qquad n^3 = p^3 + (q^3+3pq^2) > p^3,$$

であり、3 乗は狭義単調増加（strictly increasing）なので $n > q$ かつ $n > p$ である。これらを整理するとそれぞれ $p+q-n < p$、$p+q-n < q$ となる。下からの評価も必要になる：

$$(p+q)^3 = p^3+3p^2q+3pq^2+q^3 = n^3+3p^2q > n^3,$$

よって $p+q > n$、すなわち $p+q-n > 0$ である。

素数解は存在しない。 p と q が素数で、n が整数であると仮定する。$d = p+q-n$ とおくと、これは次を満たす整数である：

$$0 < d < p, \qquad 0 < d < q.$$

上の展開より $(p+q)^3 - n^3 = 3p^2q$ であり、3 乗の差を因数分解（factorise）すると

$$d\left((p+q)^2 + (p+q)n + n^2\right) = 3p^2q,$$

となるので、d は $3p^2q$ を割り切る。

考えてみよう なぜ d は p や q と共通因数をもちえないのか？

p は素数なので、d が p と共通因数をもつのは p が d を割り切るときに限られ、そのためには $d \geq p$ が必要である。しかし $d < p$ である。同様に、$d < q$ より q は d を割り切らない。よって d は p^2q と互いに素（coprime）であり、$d \mid 3p^2q$ から $d \mid 3$ が従う。不等式はまさにこのためにあったのである。したがって $d = 1$ または $d = 3$ である。$s = p+q$ とおく。

$d = 1$ の場合。 このとき $n = s-1$ であり、

$$3p^2q = s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s + 1,$$

となるが、これはありえない。左辺は 3 の倍数であり、右辺は 3 で割ると 1 余るからである。

$d = 3$ の場合。このとき $3 = d < p$ かつ $3 < q$ なので、p も q も 3 ではない。ここで $n = s - 3$ であり、

$$3p^2q = s^3 - (s-3)^3 = 9s^2 - 27s + 27, \qquad \text{よって} \qquad p^2q = 3(s^2 - 3s + 3).$$

ゆえに $3 \mid p^2q$ であり、3 は素数なので p または q を割り切り、どちらかが 3 に等しくなる。これは $p, q > 3$ に矛盾する。

どちらの場合もありえないので、$p^3 + q^3 + 3pq^2$ が整数の 3 乗となるような素数 p と q は存在しない。 ■

検算

$x, y < 2000$ を満たすすべての正の整数について総当たりで探索すると、(i) の 3 組がちょうど見つかる。$p, q < 1500$ を満たすすべての素数について、$p^2 + pq + q^2$ が平方数（perfect square）となるのは $\{p, q\} = \{3, 5\}$ のとき（値は 49）のみであり、$p^3 + q^3 + 3pq^2$ が立方数（perfect cube）になることはない。(iii) の $0 < p + q - n < \min(p, q)$ は、ランダムな正の実数で確かめられる。(ii) の手計算による簡単な確認：$(3+5+7)(3+5-7) = 15 \times 1 = 15 = pq$。

よくある間違い

- (i) で 49 の負の因数の組を忘れる。ここでは解を与えないが、無視するのではなく、除外しなければならない。
- (ii) で、$p + q - n$ が小さいほうの因数であり正であることを根拠なく仮定する。どちらも $n > 0$ と $pq > 0$ から従うが、それを述べる必要がある。
- (iii) で $d \mid 3$ で止まってしまう。$d = 1$ と $d = 3$ の 2 つの場合をさらに除外しなければならず、2 つ目では再び $d < p, q$ という事実が必要になる。

STEP のその先へ

どの小問も同じ技法を用いている。ディオファントス方程式（Diophantine equation）を、素因数分解がわかっている数に等しい整数の積として書き直し、大きさと互いに素であることを用いて因数を確定させるのである。小問 (i) はエジプト式分数（Egyptian fraction）の方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ の仲間であり、小問 (ii) は 120° の角をもつ整数辺の三

角形に関するものである。$p^2 + pq + q^2 = n^2$ はその角に対する余弦定理（cosine rule）にほかならないからである。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、この種の初等整数論（elementary number theory）へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。