解答例

STEP III 2023、第 4 問

純粋数学 ・ チェビシェフ多項式の係数

> **STEP III 2023、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

$\cos((2n+1)\theta)$ を $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$ の実部（real part）として書き表すと、p は具体的な和の形になり、p の各係数は二項係数（binomial coefficient）の和になる。$\sum\binom{N}{2r}$ や $\sum r\binom{N}{2r}$ のように偶数番目の添字だけを走る和は、$(1+t)^N$（またはその導関数（derivative））に $t=1$ と $t=-1$ を代入して足したり引いたりすれば求められる。そうすると奇数番目の項が打ち消し合うからである。最後の小問では、因数分解（factorisation）の両辺で上位のいくつかの係数を比較する。

解答

以下を通して、$c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ と書く。

小問 (i)

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）と二項定理（binomial theorem）により、

$$\cos((2n+1)\theta) + \mathrm{i}\sin((2n+1)\theta) = (c+\mathrm{i}s)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

c と s は実数であるから、実数となる項はちょうど k が偶数の項であり、それを $0\le r\le n$ として $k=2r$ と書くと、$(\mathrm{i}s)^{2r} = (-1)^r s^{2r} = (-s^2)^r = (c^2-1)^r$ となる。実部をとって、

$$\cos((2n+1)\theta) = \sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta - 1)^r,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

小問 (i) より、すべての $x = \cos\theta \in [-1,1]$ に対して

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

が成り立つ。両辺はともに多項式（polynomial）であり、無限個の点で値が一致するので、同じ多項式である。

第 r 項は次数（degree）が $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$ で、最高次の係数（leading coefficient）は $\binom{2n+1}{2r}$ である。また定数 1 は x^{2n+1} に影響しない。したがって p における x^{2n+1} の係数は

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

すなわち偶数番目の二項係数の和である。$(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$ に $t=1$ と $t=-1$ を代入すると

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

これらを足すと、k が奇数の項は打ち消し合い、k が偶数の項は 2 倍になる：$2S_0 = 2^{2n+1}$。よって $\mathrm{p}(x)$ における x^{2n+1} の係数は $S_0 = 2^{2n}$ である。

小問 (iii)

第 r 項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ において x^{2n-1} を得るには、$(x^2-1)^r$ の x^{2r-2} の項が必要である。その項は $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$ である（$r=0$ のときはこの項は存在しないが、これは $-r=0$ と整合する）。$n \geq 1$ より $2n-1 \geq 1$ であるから、p の定数 1 は関係しない。したがって x^{2n-1} の係数は

$$-\sum_{r=0}^{n} r\binom{2n+1}{2r}.$$

考えてみよう 各項に r の重みがついているとき、偶数番目の項だけを取り出すにはどうすればよいだろうか。

微分（differentiation）すると、添字が係数として前に出てくる。$(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$ から、

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k\binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

$t=1$ のとき、これは $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$ を与える。$t=-1$ のときは左辺が 0 になる（$2n \geq 1$ であるから）ので、

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k\binom{2n+1}{k} = \sum_{k\text{ が奇数}} k\binom{2n+1}{k} - \sum_{k\text{ が偶数}} k\binom{2n+1}{k}.$$

よって k が偶数の部分と奇数の部分は等しく、それぞれ全体の半分である：

$$\sum_{k\text{ が偶数}} k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

$k = 2r$ とすると、これは $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-1}$、すなわち $\sum_r r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-2}$ を意味する。よって $\mathrm{p}(x)$ における x^{2n-1} の係数は $-(2n+1)2^{2n-2}$ であり、示すべきことが得られた。

小問 (iv)

最高次の係数。 (ii) より、p は次数 $2n+1$、最高次の係数 2^{2n} の多項式である。q の次数を m、最高次の係数を a とすると、$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ は次数 $2m+1$、最高次の係数 a^2 である。よって $m = n$ かつ $a^2 = 2^{2n}$ であり、$a > 0$ であるから、q における x^n の係数は 2^n である。

p についてのもう一つの事実。 各項 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ は x の奇数乗のみを含む。$x^{2n+1-2r}$ は奇数乗であり、$(x^2-1)^r$ は偶数乗のみをもつからである。p に現れる偶数乗は定数 1 だけである。$2n \geq 2$ であるから、p における x^{2n} の係数は 0 である。

係数の比較。 ここで $n \geq 2$ とし、

$$\mathrm{q}(x) = 2^n x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

と書くと、

$$[\mathrm{q}(x)]^2 = 2^{2n}x^{2n} + 2^{n+1}b\,x^{2n-1} + (b^2 + 2^{n+1}c)x^{2n-2} + \cdots.$$

$x+1$ を掛けると、$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ における x^{2n} と x^{2n-1} の係数はそれぞれ

$$2^{n+1}b + 2^{2n} \qquad \text{および} \qquad (b^2 + 2^{n+1}c) + 2^{n+1}b.$$

p における x^{2n} の係数は 0 であるから、$b = -2^{2n}/2^{n+1} = -2^{n-1}$ である。すると $b^2 = 2^{2n-2}$、$2^{n+1}b = -2^{2n}$ となり、x^{2n-1} の係数を小問 (iii) の結果と一致させると

$$2^{2n-2} + 2^{n+1}c - 2^{2n} = -(2n+1)2^{2n-2}.$$

整理すると、

$$2^{n+1}c = 2^{2n-2}(-(2n+1) - 1 + 4) = 2^{2n-2}(2-2n) = 2^{2n-1}(1-n),$$

よって q における x^{n-2} の係数は

$$c = 2^{n-2}(1-n),$$

であり、示すべきことが得られた。

検算

- $n = 1$ のとき：$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから、$\mathrm{p}(x) = 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$。最高次の係数は 2^2、x の係数は $-3 = -3\cdot 2^0$ であり、q の最高次の係数は 2^1 である。
- $n = 2$ のとき：$\mathrm{p}(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$。$x^3$ の係数は $-20 = -5\cdot 2^2$ であり、q の定数項は $-1 = 2^0(1-2)$ である。
- $n = 3$ のときは $\mathrm{q}(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ が得られ、x の係数は $-4 = 2^1(1-3)$ に等しい。コンピュータによる検証で、$\cos\big((2n+1)\theta\big) + 1$ を厳密に展開し、$\mathrm{p}(x)/(x+1)$ の平方根をとることにより、$n = 1, \ldots, 12$ についてすべての係数の公式が正しいことを確認した。

よくある間違い

- p の x^{2n} の係数を見落とすこと。これは 0 であり、まさにこのことが q の x^{n-1} の係数 b を決定する。c を求めるにはまず b が必要である。
- $(\mathrm{i}s)^{2r} = s^{2r}$ と書いて符号 $(-1)^r$ を失うこと。この符号があるからこそ、$1 - \cos^2\theta$ ではなく $\cos^2\theta - 1$ が現れるのである。
- (iii) で導関数に $t = 1$ だけを代入すること。これでは偶数の k だけでなく、すべての k にわたる和が得られてしまう。

STEP のその先へ

$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$ を満たす多項式 T_N は N 次のチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomial）であり、小問 (ii) と (iii) はその上位 2 つの係数を求めている。(iv) の因数分解は、$T_{2n+1}(x) + 1$ が $x = -1$ に単根（simple root）をもち、$\cos\big((2n+1)\theta\big) = -1$ となる他の各点に重根（double root）をもつという事実を反映している。チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）において中心的な役割を果たす。N 次のモニック多項式（monic polynomial）のうち、$[-1, 1]$ 上での最大の大きさが最小となるのは $2^{1-N}T_N$ である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には、この種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。