解答例

STEP III 2023、第 3 問

純粋数学 • 3 次方程式の複素数解

> **STEP III 2023、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

a を基準に測ると、3 点は $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$、b である。i を掛けるとベクトルは直角だけ回転するので、a は底辺の中点であり、b は対称軸の向きを指す。この図が描ければ、小問 (ii) はヴィエタ（Vieta）の公式（Vieta's formulas）の問題になる。解の和が 0 であることから b が a で表され、その結果 p^3/q^2 から a が消える。小問 (iii) と (iv) では、この結果を $x = s^2 > 0$ の 1 変数関数に書き直し、そのグラフからこの値がどこまで小さくなりうるかを読み取る。

解答

小問 (i)

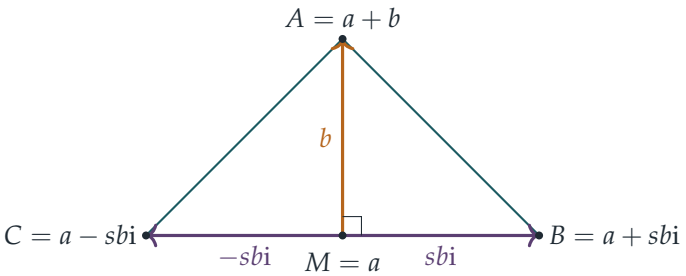
$a + b$ から他の 2 点までの距離は

$$|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

であり、これらは等しい。さらに、3 点が本当に三角形をなすことを確かめる必要がある。a を基準にすると、3 点は $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$、b である。最初の 2 点は（$s > 0$ かつ $b \neq 0$ より）相異なり、a を通り $b\mathrm{i}$ の向きをもつ直線上にある。$b\mathrm{i}$ は b を直角だけ回転したものなので、$b \neq 0$ より第 3 の点 $a + b$ はその直線上にない。よって、これらの点は頂点 $a + b$、底辺 $a - sb\mathrm{i}$ から $a + sb\mathrm{i}$、底辺の中点 a をもつ二等辺三角形（isosceles triangle）をなす。

a、b、s を復元する。三角形の頂点を A（等しい 2 辺が交わる頂点。正三角形ならどの

頂点でもよい)、他の頂点を B、C とし、BC の中点を M とする。



- $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$ とおく。
- $b = A - M$ とおく。A は BC 上にないので、これは o でない。
- $AB = AC$ より、A は BC の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあるので、$MB \perp MA$ である。よって $B - M$ は b を直角だけ回転して拡大・縮小したものであり、ある実数 $\lambda \neq 0$ を用いて $B - M = \lambda b\mathrm{i}$ と書ける。$\lambda < 0$ ならば、ラベル B と C を入れ替えれば λ の符号が変わる。このとき $s = \lambda > 0$ は

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{三角形の高さ}}.$$

である。

すると $a + b = A$、$a + sb\mathrm{i} = B$、$a - sb\mathrm{i} = M - (B - M) = C$ となり、求める表示が得られる。

小問 (ii)

小問 (i) より、解を $b \neq 0$、$s > 0$ として $a + sb\mathrm{i}$、$a - sb\mathrm{i}$、$a + b$ と表せる。この 3 次式には z^2 の項がないので、解の和は o である：

$$3a + b = 0, \qquad \text{よって} b = -3a,$$

また $b \neq 0$ より $a \neq 0$ である。したがって解は

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

である。最初の 2 つの積は $a^2(1 + 9s^2)$、和は $2a$ である。よってヴィエタの公式により

$$p = a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1),$$
$$q = -(\text{解の積}) = -(-2a)\,a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1).$$

ここで $a \neq 0$ より $q \neq 0$ なので、割り算ができる：

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

ただし s は o でない（実際には正の）実数であり、これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$x \neq -\frac{1}{9}$ で定義される $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$ を考える。商の微分法（quotient rule）により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

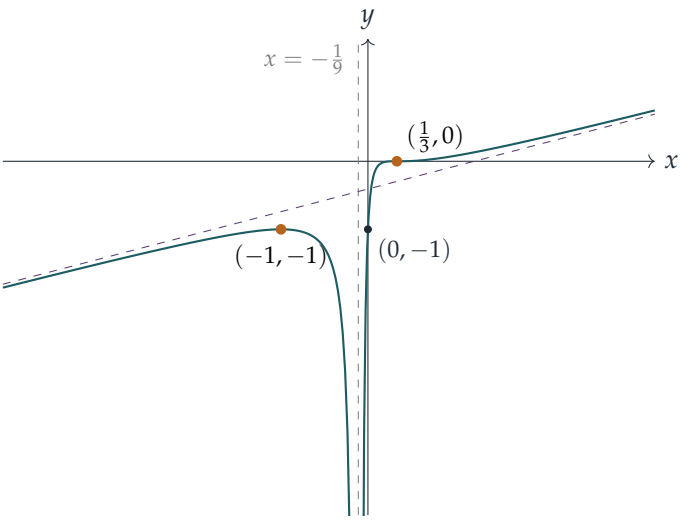
よって停留点（stationary point）は $x = -1$ と $x = \frac{1}{3}$ である。

- $x = -1$ では $y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$ である。$x < -1$ では因数 $x+1$ と $(9x+1)^3$ がともに負なので $y' > 0$ である。$-1 < x < -\frac{1}{9}$ では $(9x+1)^3$ のみが負なので $y' < 0$ である。よって $(-1,-1)$ は**極大点**（local maximum）である。
- $x = \frac{1}{3}$ では $y = 0$ である。その両側（$x > -\frac{1}{9}$ の範囲）では $(3x-1)^2$ 以外の因数はすべて正であり、$x \neq \frac{1}{3}$ では $(3x-1)^2 > 0$ である。よって両側で $y' > 0$ であり、$(\frac{1}{3},0)$ は**停留変曲点**（stationary point of inflection）である。

特に、$x > -\frac{1}{9}$ では 1 点 $x = \frac{1}{3}$ を除いて $y' > 0$ であるから、y はそこで狭義単調増加（strictly increasing）である。

その他の特徴：

- 垂直漸近線（vertical asymptote）$x = -\frac{1}{9}$。ここで分子は $(-\frac{4}{3})^3 < 0$ に、分母は 0^+ に近づくので、両側から $y \to -\infty$ となる。
- $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ を $81x^2 + 18x + 1$ で割ると商は $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ となるので、$y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ は $x \to \pm\infty$ における斜漸近線（oblique asymptote）である。
- 曲線は座標軸と $(0,-1)$ および $(\frac{1}{3},0)$ で交わる。



破線は斜漸近線 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ である。左側の枝は決して -1 より上には出ない。右側の枝は $-\infty$ から増加し、すべての実数値をとる。

小問 (iv)

小問 (ii) で得た実数 $s \neq 0$ を用い、$x = s^2$ とおくと

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

である。s は実数なので右辺は実数であり、したがって p^3/q^2 も実数である。

考えてみよう グラフは $-\infty$ まで下がっているのに、なぜ p^3/q^2 はいくらでも小さな負の値にはなれないのだろうか？

それは、$x = s^2$ が任意の実数ではないからである。s は 0 でない実数なので $x > 0$ である。したがって考えるべき x の値は右側の枝の上にあり、（小問 (iii) より）そこでは y は狭義単調増加である。よって $x > 0$ に対して

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

であり、したがって

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

となる。$x = 0$（すなわち $s = 0$）が除外されているので、不等号は等号を含まない。$x = 0$ のときは三角形がつぶれて線分になってしまう。

検算

- 正三角形（equilateral triangle）：$z^3 - 1 = 0$ の解は正三角形をなす。このとき $p = 0$ であり、公式は $s^2 = \frac{1}{3}$ のとき、すなわち底辺の半分が高さの $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍であるときにちょうど $p = 0$ を与える。これはまさに正三角形の形である。
- 具体例：$a = 1$、$s = 1$ とすると解は $1 \pm 3\mathrm{i}$ と -2 であり、$z^3 + 6z + 20 = 0$ となる。このとき $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$ であり、公式からも $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$ が得られる。
- $s \to 0$ とすると三角形はつぶれて a における重解に近づき、$p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$ となる。$4p^3 + 27q^2 = 0$ はまさに重解（repeated root）をもつための条件である。$s = 10^{-4}$ のとき、値はおよそ -6.749998 である。
- 重心（centroid）が原点にあるランダムな二等辺三角形についてコンピュータで確かめたところ、p^3/q^2 は常に実数で、-6.75 より大きかった。

よくある間違い

- 小問 (i) で a と b を実数として扱ってしまう。これらは複素数なので、三角形はどんな向きにもなりうる。
- q の符号を間違える。モニック（monic）な 3 次式では、q は解の積に**マイナス**をつけたものである。
- 小問 (iv) でグラフ全体を使ってしまい、$x = s^2 > 0$ であることを忘れる。この条件こそが右側の枝にとどまらせるものである。

STEP のその先へ

量 $-(4p^3 + 27q^2)$ はこの 3 次式の判別式（discriminant）であり、p^3/q^2 は形の不変量（invariant）である。すなわち、解を重心のまわりに回転したり拡大・縮小したりしても値は変わらない（z を kz に置き換えると p は k^2 倍、q は k^3 倍になる）ので、この量は解のなす三角形の**形**だけを記録している。このような不変量は、変数変換のもとで多項式を分類する理論の出発点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は、この問題が求めるように複素数を幾何学的に考えるための見事な案内書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。