解答例

STEP III 2023、第 2 問

純粋数学 • 極方程式で表された曲線の面積

STEP III 2023、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの曲線も、$\theta = 0$ から $\theta = \pi$ まで動く動径によって描かれる。したがってこの問題の核心は、各角度においてどちらの曲線が外側にあるかという点にある。$k(1+\sin\theta)$ と $k+\cos\theta$ を比較すると、両者の大小はちょうど一度だけ、$\theta = \alpha$ において入れ替わることがわかる。すると領域 A と B を合わせたものは二つの曲線の共通部分となり、すべての面積は極座標（polar coordinates）による面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ から求められる。その際、$\sin^2$ と $\cos^2$ は倍角の公式（double angle formulae）で処理する。

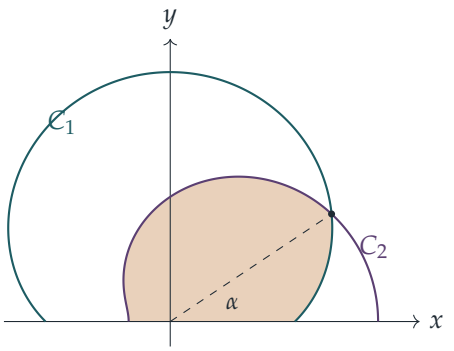
解答

小問 (i)

概形を描くには、いくつかの値が役に立つ。

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$
C_1: $r = k(1+\sin\theta)$	k	$2k$	k
C_2: $r = k+\cos\theta$	$k+1$	k	$k-1$

（$k > 1$ であるから）どちらの動径も常に正である。C_1 はカージオイド（cardioid）の上半分であり、y 軸に関して対称で、点 $(0, 2k)$ に達する。C_2 は「半径がおよそ k」のやや押しつぶされた半円であり、$\theta = 0$ では 1 だけ右に押し出され、$\theta = \pi$ では 1 だけ内側に引っ込んでいる。下図は $k = 1.5$ の場合であり、網掛けの部分が二つの曲線の重なる領域である。



交点では動径が一致するから、

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

ここで $\cos\alpha \neq 0$ である（もし0ならば $k\sin\alpha = 0$ が必要となるが、そのとき $\sin\alpha = \pm 1$ である）。よって両辺を割ると $\tan\alpha = \dfrac{1}{k}$ が得られ、これが示すべきことであった。$0 < \frac{1}{k} < 1$ であるから、$[0,\pi]$ においてこのような角はちょうど一つ存在し、$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たす。

さらに有用なこととして、$k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$ であり、これは $0 \le \theta < \alpha$ で正、$\alpha < \theta \le \pi$ で負である（下に示す $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ の値を用いると、これは $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$ に等しく、$\alpha-\theta$ はそれぞれ $(0,\alpha]$ または $[\alpha-\pi, 0)$ に属する）。したがって、C_2 は α より手前では C_1 の外側にあり、それ以降は内側にある。

また、$\tan\alpha = \frac{1}{k}$ から得られる次の値も用いる。

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

小問 (ii)

領域 A は、$0 \le \theta \le \alpha$ において C_1 までの動径が掃く領域であるから、その面積は

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

である。ここで $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ と $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ を用いた。これが求める式である。

小問 (iii)

同様に、$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ を用いると、B の面積は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}(k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}\left(k^2+\tfrac{1}{2}+2k\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(k^2+\tfrac{1}{2}\right)\theta+2k\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\alpha}^{\pi}\\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-k\sin\alpha-\tfrac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

となる。α の三角関数を消去したければ、小問 (i) の値から $k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$、$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$ であるから、

$$\text{B の面積} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k}{4(1+k^2)}.$$

小問 (iv)

考えてみよう A と B を合わせた領域はどのような形をしているだろうか。

小問 (i) より、$\theta<\alpha$ では A の境界は内側の曲線 C_1 であり、$\theta>\alpha$ では B の境界は内側の曲線 C_2 である。したがって R は二つの領域の共通部分（図の網掛け部分）の面積である。このことからすでに答えの見当がつく。k が大きいとき、C_2 はほぼ完全に C_1 の内側に収まるので、共通部分は T のほぼ全体になるはずである。

全体の面積は、同じ積分を $[0,\pi]$ で行えば得られる（$\sin\theta$ と $\sin 2\theta$ の項は両端で 0 となり、$-2\cos\theta$ からは 4 が出る）。

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(2k^2+1)}{4},\qquad S=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

$k\to\infty$ のとき、$\alpha=\arctan\frac{1}{k}\to 0$ である。A を展開する代わりに、上から評価する（bound）。$[0,\alpha]$ において $r=k(1+\sin\theta)\le 2k$ であるから、A は半径 $2k$、中心角 α の扇形（sector）の内部にあり、$\alpha<\tan\alpha=\frac{1}{k}$ であるから、

$$0<\text{A の面積}\le\tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha<2k.$$

よって $\dfrac{\mathrm{A}}{T}<\dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)}\to 0$ である。B については、小問 (iii) の結果を T で割ると

$$\frac{\mathrm{B}}{T}=\frac{\pi-\alpha}{\pi}-\frac{4\left(k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)}\to 1-0=1,$$

となる。なぜなら $\alpha \to 0$ であり、また $0 < k\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha < k+1$ は $2k^2+1$ に比べて小さいからである。したがって

$$\frac{R}{T} = \frac{\mathrm{A}}{T} + \frac{\mathrm{B}}{T} \to 1.$$

最後に

$$\frac{R}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)} \to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8} = \frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

検算

- $\theta = 0$ では C_2（$r = k+1$）は C_1（$r = k$）の外側にあり、$\theta = \frac{\pi}{2}$ では内側にある（$k < 2k$）。よって両曲線はその間で交わらなければならず、$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ と整合する。
- $k = 2$ のとき：$\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$、$\mathrm{A} \approx 1.4132$、$\mathrm{B} \approx 5.0309$、$T = \frac{9}{4}\pi \approx 7.0686$ であるから、$R/T \approx 0.912$ である。$\frac{1}{2}r^2$ を直接数値積分した結果は、どちらの式とも一致する。
- $k = 50$ のとき、$R/T \approx 0.99987$、$R/S \approx 0.36061$ であり、$\frac{2\pi}{3\pi+8} \approx 0.36059$ に近い。
- 極限についての妥当性の確認：k が非常に大きいとき、C_2 はほぼ半径 k の半円（面積 $\frac{1}{2}\pi k^2$）であり、C_1 は面積 $\frac{3\pi}{4}+2$ の一定の半カージオイドを k 倍したものである。その比は $\frac{2\pi}{3\pi+8}$ となる。

よくある間違い

- 極座標の面積公式の係数 $\frac{1}{2}$ を忘れること、あるいは $1+\sin\theta$ の 2 乗を $1+\sin^2\theta$ としてしまうこと。
- 小問 (iv) で、$k^2(1-\cos\alpha)$ が「$\alpha \to 0$ だから 0 に収束する」と論じること。これには k^2 が掛かっており、実際には $\frac{1}{2}$ に収束する。重要なのは T と比べたときの大きさだけである。

STEP のその先へ

極形式で与えられた二つの領域の共通部分の面積は、大学 1 年の多変数微積分（multivariable calculus）で出会う面積分 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ の最初の味見である。そこでも難しいのはつねに領域の記述であり、まさにここと同じである。小問 (iv) の極限の議論（項を正確に計算するのではなく評価する）は、実解析（real analysis）の流儀である。この流儀が丁寧に展開される様子を見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。