解答例

STEP III 2023、第 11 問

確率・統計 ・ 条件付き期待値

> **STEP III 2023、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の級数は、$k+1 = k+1$ と書いて k を $k!$ と約分すれば、よく知られた二つの指数級数（exponential series）に分かれる。小問 (i) では、D の分布（distribution）に $D = d$ を生じうる Y のすべての値にわたる和が現れる。二重和（double sum）の順序を入れ替えると、内側の和は易しい $1+2+\cdots+k$ となり、そこに現れる因子 $\frac{1}{2}(k+1)$ はまさに冒頭の級数で処理できる形である。小問 (ii) は、さいころの目で条件付け（conditioning）をすれば済む。

解答

級数

$k \geq 1$ のとき $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$ であるから、分子を分けると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 \right) \\ &= x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1 = (x+1)\mathrm{e}^x - 1,\end{aligned}$$

となる。ただし、第一の和では $j = k-1$ とおいた。どちらの級数もすべての実数 x に対して収束（converge）するので、このように分けてよい。これが求める恒等式である。

小問 (i)(a)

$D = 0$ となるのは $Y = 0$ のときに限る（$Y = k \geq 1$ ならば、さいころの目は 1 以上である）。よって

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-n}.$$

小問 (i)(b)

$d \geq 1$ を固定する。さいころが d の目を出しうるのは、さいころの面が d 個以上あるとき、すなわち $k \geq d$ として $Y = k$ のときに限る。また $Y = k \geq d$ のもとで、公平なさいころが d を出す確率は $\frac{1}{k}$ である。全確率の公式（law of total probability）により

$$\mathrm{P}(D = d) = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{P}(D = d \mid Y = k)\,\mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

定義より期待値（expectation）は $\mathrm{E}(D) = \sum_{d=0}^{\infty} d\,\mathrm{P}(D = d)$ であり、$d = 0$ の項は 0 であるから

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=1}^{\infty} \left[d \sum_{k=d}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \right) \right],$$

となり、求める形が得られる。

> **考えてみよう** 外側が d についての和、内側が $k \geq d$ についての和であるものを、外側が k についての和になるように書き換えるにはどうすればよいか。

この二重和は、$1 \leq d \leq k$ を満たす整数の組 (d, k) すべてにわたる。各項 $\frac{d}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ はすべて非負であるから、和をとる順序を変えても総和は変わらない。d ごとではなく k ごとにまとめると、各 $k \geq 1$ に対して d は 1 から k まで動く。したがって

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \sum_{d=1}^{k} d \right),$$

となり、これが求める第二の形である。

小問 (i)(c)

$\sum_{d=1}^{k} d = \frac{1}{2}k(k+1)$ を用いると、因子 $\frac{1}{k}$ が約分されて

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} n^k \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \left((n+1)\mathrm{e}^{n} - 1 \right) = \tfrac{1}{2}\left(n + 1 - \mathrm{e}^{-n} \right), \end{aligned}$$

となる。ここで冒頭の恒等式を $x = n$ として用いた。これが求める結果である。

小問 (ii)(a)

n 面のさいころの目を K とすると、$k = 1, \ldots, n$ に対して $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$ であり、$K = k$ のもとでは $Z = X_k$ で、これは平均 k のポアソン分布（Poisson distribution）に従う。よって $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$ であり、全確率の公式により

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

これは初項 e^{-1}、公比 e^{-1} の等比級数（geometric series）であるから

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

となる。最後は分子と分母に e を掛けた。

小問 (ii)(b)

再びさいころの目で条件付けると、$\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$ であるから

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

小問 (i)(c) と比べると

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

であるから、求めるとおり $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$ である。

興味深いことに、0 の場合がなければ両者は一致する。面の数がポアソン分布に従う個数 Y である公平なさいころの目は平均して $\frac{1}{2}(Y+1)$ であり、その平均は $\frac{1}{2}(n+1)$ である。差が生じるのは、$Y = 0$ のとき、式 $\frac{1}{2}(Y+1)$ が与える $\frac{1}{2}$ ではなく $D = 0$ となる点だけであり、これは確率 e^{-n} で起こるので、ちょうど $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$ だけ小さくなる。

検算

- $x = 0$ のとき、冒頭の恒等式は $0 = 1 \cdot 1 - 1$ となる。$x = 1$ のときは $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$ となり、部分和を計算するとこれが確かめられる。
- $n = 3$ のとき、$\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$、$\mathrm{E}(Z) = 2$、$\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$ である。それぞれの試行を 200 000 回行うコンピュータシミュレーションでは、1.970、2.002、0.185 が得られた。
- $n = 1$ のとき、小問 (ii) のさいころは常に 1 を出すので $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$ である。公式からも $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$ が得られる。

よくある間違い

- (i)(b) の内側の和を $k = d$ ではなく $k = 1$ から始めてしまう。k 面のさいころが k より大きい目を出すことはない。
- 冒頭の恒等式の -1 を忘れる。これは e^x の $k = 0$ の項が欠けていることから生じるもので、(i)(c) の e^{-n} の出どころである。

STEP のその先へ

どちらの小問も、塔の法則（tower law）$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$ の例である。小問 (i) では、この法則により一行で $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$ が得られ、私たちが手で行った和の順序の入れ替えこそ、この法則の中に隠れている部分である。非負の項からなる二重級数を自由に並べ替えてよいことは一つの定理（一般の形ではトネリ（Tonelli）の定理）であり、大学一年次の解析学で学ぶ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値（conditional expectation）と、それを用いて構成される複合分布を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。