解答例

STEP III 2023、第 10 問

力学 ・ 梁のつり合い

STEP III 2023、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

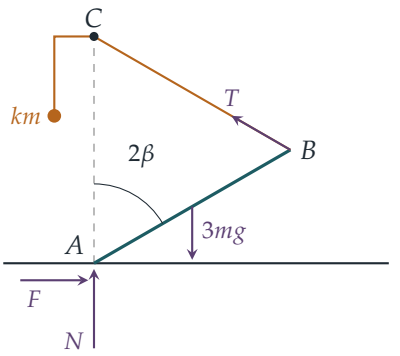
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

滑車（pulley）は A のちょうど梁（beam）の長さだけ真上にあるので、A、B、C は $AB = AC = 2h$ の二等辺三角形（isosceles triangle）をなす。この幾何学的配置から、糸の向きと、A から糸までの垂直距離がただちに得られる。あとは、釣り合っている棒に対するいつもの手順ですべてが導かれる。すなわち、A のまわりの力のモーメント（moments）をとり（これで未知の接触力が二つとも消える）、力を分解（resolve）し、条件 $F \leq \mu N$ を課すのである。

解答

梁を一様な棒（uniform rod）、二つの物体を質点（point mass）、糸をなめらかな滑車にかけられた軽くて伸び縮みしない（inextensible）糸とみなす。したがって張力（tension）は糸全体で等しい。つり下げられた物体は釣り合い（equilibrium）の状態にあるので、張力は $T = kmg$ である。



A を原点とし、x 軸を水平に（B のある側を正の向きに）、y 軸を鉛直上向きにとる。すると $C = (0, 2h)$、$B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$ である。

糸の向き。 B から C へのベクトルは、$1 - \cos 2\beta = 2\sin^2\beta$ を用いると

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1 - \cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

となる。よって、梁にはたらく張力の水平成分は $-x$ 方向（直線 AC の側へ戻る向き）に $T\cos\beta$、鉛直成分は上向きに $T\sin\beta$ である。幾何学的に見れば、二等辺三角形 ABC の底角は $90^\circ - \beta$ なので、BC は水平と角 β をなす。

モーメントの腕。 A から BC に下ろした垂線は二等辺三角形の頂角 2β を二等分するので、その長さは $2h\cos\beta$ である。

小問 (i)

A のまわりのモーメント。 重力 $3mg$ は AB の中点にはたらき、その点は A から水平距離 $h\sin 2\beta$ のところにある。これと張力のモーメントを釣り合わせると

$$kmg \cdot 2h\cos\beta = 3mg \cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

$0 < 2\beta < 180^\circ$ より $\cos\beta \neq 0$ であるから、これで割ってよく、

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

を得る。（これは $k < 3$ と矛盾しない。）

力の分解。 鉛直方向について $N + T\sin\beta = 3mg$ であるから

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

水平方向については、摩擦力（friction）が糸の水平方向の引きと釣り合わなければならないので、摩擦力は $+x$ 方向にはたらき、

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

したがって $F/N = \tan\beta$ である。

摩擦の条件。 釣り合いには $F \le \mu N$、すなわち $\tan\beta \le \mu$ が必要である。ここで

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta}.$$

関数 $t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ は $t \ge 0$ で増加し、$0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$ であるから

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2 + 1},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

今度は $T = 2mg$ であり、追加した質量 m の物体は A から水平距離 $xh\sin 2\beta$ のところにある。糸の幾何学的配置は変わらない。

A のまわりのモーメント：

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

であり、$2mgh\cos\beta \neq 0$ で割ると

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

$0 \leq x \leq 2$ のとき、この値は $\frac{2}{5}$ と $\frac{2}{3}$ の間にあるので、このような β は存在する。

力の分解：

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

であるから

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

$\sin\beta = 2/(3+x)$ を代入すると

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$
$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ の因子は約分されて

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

となり、これが求める結果である。

考えてみよう 「x の値にかかわらず」という条件を、μ に関する条件にどう言い換えればよいだろうか？

各 x について $F \leq \mu N$、すなわち $\mu \geq F/N$ が必要である。すべての $x \in [0,2]$ でこれが成り立つためには、μ がその区間における F/N の**最大値**以上でなければならない。そこで F^2/N^2 の最大値を求めたい。

ヒントに従うと

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \geq 0,$$

であり、等号はちょうど $x=1$ のときに成り立ち、これは許される範囲内にある。よって、すべての $x \in [0,2]$ に対して $F^2/N^2 \leq \frac{1}{3}$ であり、この上界は $x=1$ で達成され

る。したがって F/N の最大値は $1/\sqrt{3}$ であり、梁がすべての x に対して釣り合いうるための必要十分条件は $\mu \geq 1/\sqrt{3}$ である。求める最小値は

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

検算

- 小問 (i) で、梁が水平になる場合 $2\beta = 90^\circ$ を考える。このとき $B = (2h, 0)$ で、糸 BC は 45° の傾きをもち、A からの距離は $\sqrt{2}\,h$ である。モーメントより $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$、よって $T = 3mg/\sqrt{2}$ となり、$k = 3\sin 45^\circ$ と一致する。また $N = F = \frac{3}{2}mg$ なので $F/N = 1 = \tan 45^\circ$ である。
- 小問 (ii) で $x = 0$ のとき、公式は $5/16$ を与える。直接計算しても $\sin\beta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\beta = \frac{5}{9}$、$(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$ より、やはり $\frac{5}{16}$ となる。
- $x = 1$ のとき：$\sin\beta = \frac{1}{2}$ なので $\beta = 30^\circ$ であり、梁は鉛直と 60° をなす。$F/N = \cos 30^\circ / (2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$ である。$[0, 2]$ にわたる x についてモーメントと分解した力をコンピュータで検証し、公式とこの最大値を確認した。

よくある間違い

- 糸が鉛直方向ではなく BC に沿って引くことを忘れる。滑車は C にあるので張力には水平成分があり、摩擦力が抵抗しなければならないのはまさにこの成分である。
- $0 \leq x \leq 2$ における F/N の最大値ではなく、最小値（あるいは端点での値）をとってしまう。最悪の場合は区間の内部、$x = 1$ で起こる。
- モーメントの腕を取り違える。重力の腕は水平距離（$h\sin 2\beta$）であるのに対し、張力の腕は BC までの垂直距離（$2h\cos\beta$）である。

STEP のその先へ

モーメントをとることと力を分解することは、剛体（rigid body）の釣り合い条件、すなわち合力が 0 であることと合トルク（torque）が 0 であることの二つの半分にあたる。大学ではこれらはベクトルの式 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ と $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ になり、小問 (ii) の「パラメータについての最悪の場合」を考える推論は、技術者が安全余裕を見込んで設計する方法の一端を味わわせてくれる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、静力学（statics）とトルクをこのベクトルの言葉で丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。