解答例

STEP III 2023、第 1 問

純粋数学 • 2 次曲線の接線

STEP III 2023、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

直線が円に接する（tangent）のは、円の中心からその直線までの垂線の距離（perpendicular distance）が半径に等しいとき、かつそのときに限る。そこで、弦（chord）PQ を p と q で表し、その距離を計算すると、接する条件が与えられた関係式にまとまることがわかる。その後は、2 つのパラメータについての 1 つの対称な方程式がすべてである。最後の小問では、3 番目の辺についてもこの関係式が成り立つかが問われるが、これは解の和と積（sums and products of roots）の出番である。

解答

小問 (i)

PQ の傾きは

$$\frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{p+q}{2},$$

である。ここで、2 点は異なるので $q - p \neq 0$ で割ってよい。したがって、P を通るこの直線は $y - ap^2 = \frac{1}{2}(p+q)(x - 2ap)$ であり、整理すると

$$(p+q)x - 2y - 2apq = 0.$$

となる。中心 $C(0, 3a)$ からこの直線までの距離は

$$\frac{|-6a - 2apq|}{\sqrt{(p+q)^2 + 4}} = \frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

である。直線が円に接するのは、これが $2a$ に等しいとき、すなわち（両辺は正なので 2 乗し、$4a^2 \neq 0$ で割ると）

$$(pq+3)^2 = (p+q)^2 + 4 \iff p^2q^2 + 6pq + 5 = (p+q)^2.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。これは $(*)$ そのものであるから、$(*)$ が成り立つとき直線 PQ は円の接線である。（どの段階も逆にたどれるので逆も成り立ち、これは小問 (iii) で必要になる。）

小問 (ii)

$(*)$ を展開し、q の累乗ごとに整理すると

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

となる。$p^2 \neq 1$ より最高次の係数は 0 でないので、これは q についての正真正銘の 2 次方程式である。その判別式（discriminant）は

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4 + 6p^2 - 5) \\ &= 4(p^4 - 2p^2 + 5) \\ &= 4((p^2-1)^2 + 4) > 0, \end{aligned}$$

であるから、異なる 2 つの実数解 q_1, q_2 をもつ。どちらも p には等しくない。実際、左辺に $q = p$ を代入すると $-p^4 - 2p^2 - 5 < 0$ となる。よって Q_1 と Q_2 は確かに P とは異なる点である。

この 2 次方程式から、

$$q_1 + q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1 q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

小問 (iii)

三角形 PQ_1Q_2 を考える。ここで $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$ であり、q_1, q_2 は小問 (ii) の解である。その頂点はすべて $x^2 = 4ay$ 上にあり、（(ii) で示したように）互いに異なる 3 点である。放物線（parabola）上の異なる 3 点が一直線上に並ぶことはない。直線と放物線の交点は高々 2 個だからである。よって、これは正真正銘の三角形である。

(p, q_1) と (p, q_2) は $(*)$ を満たすので、小問 (i) より辺 PQ_1 と PQ_2 は円に接する。

考えてみよう q_1 と q_2 を具体的に求めたくないとき、3 番目の辺 Q_1Q_2 が円に接することをどうやって示せばよいだろうか？

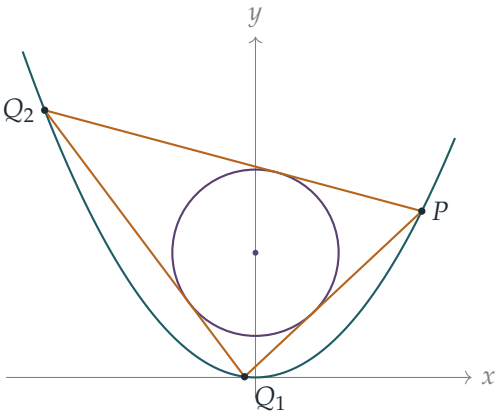
小問 (i) の逆にたどれる議論（p, q を q_1, q_2 に置き換えたもの）により、Q_1Q_2 が円に接するのは

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。両辺とも、すでにわかっている $s = q_1+q_2$ と $t = q_1q_2$ だけで表される。両辺に $(1-p^2)^2$ を掛ける。左辺は $16p^2$ となる。右辺は

$$\begin{aligned}&(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2\\ &\quad = (p^4 - 10p^2 + 25) + (-6p^4 + 36p^2 - 30) + (5p^4 - 10p^2 + 5)\\ &\quad = 16p^2.\end{aligned}$$

となる。両辺が一致するので、Q_1Q_2 も円に接し、PQ_1Q_2 が求める三角形である。



図は $a = 1$、$p = 2$ の場合であり、このとき $q_{1,2} = \frac{1}{3}(-4 \pm \sqrt{13})$ である。

検算

- $a = 1$、$p = 2$ とすると、2 次方程式は $3q^2 + 8q + 1 = 0$ であり、$q_1 + q_2 = -\frac{8}{3} = \frac{4p}{1-p^2}$、$q_1q_2 = \frac{1}{3} = \frac{p^2-5}{1-p^2}$ となる。このとき $(q_1+q_2)^2 = \frac{64}{9}$ かつ $q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5 = \frac{1}{9} + 2 + 5 = \frac{64}{9}$ であり、小問 (iii) の要求どおりである。
- 数値的には、$q_1 \approx -0.1315$、$q_2 \approx -2.5352$ のとき、3 辺の直線はいずれも $(0, 3)$ からの距離が 2.000 である。ランダムに選んだ何千通りもの a と p についてコンピュータで確かめたところ、約 10^{-13} の精度で一致した。
- 除外された場合 $p = \pm 1$ は示唆に富む。$p = 1$ のとき 2 次方程式は $-4q - 4 = 0$ に退化し、$q = -1$ しか得られない。「失われた」$P(2a, a)$ からの接線は鉛直な直線 $x = 2a$ であり、これは円に接するが、放物線とは P でしか交わらない。

よくある間違い

- 距離の公式で絶対値を忘れる、あるいは両辺が正であることを述べずに 2 乗する。
- 小問 (i) の「ならば」の向きしか使わない。小問 (iii) では Q_1Q_2 が接することを代数的な条件に言い換えるために逆が必要なので、各段階が逆にたどれることを明記すること。
- 三角形が退化しないように $q_1, q_2 \neq p$ を確かめることを怠る。

STEP のその先へ

これは**ポンスレの閉形定理**（Poncelet's porism）の一例である。ある三角形が一方の円錐曲線（conic）に内接し、かつもう一方の円錐曲線に外接するならば、そのような三角形は第 1 の円錐曲線の**どの**点から始めても作ることができる。ここでは放物線と円がそのような組であり、小問 (iii) は解と係数の関係（Vieta's formulas）を用いて閉じることを直接証明している。一般の証明には射影幾何学（projective geometry）を用い、最も美しい証明は楕円曲線（elliptic curves）による。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、このようなパラメータ表示による円錐曲線の幾何の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。