解答例

STEP II 2023、第 9 問

力学 ・ 坂の上の連結質点

STEP II 2023、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

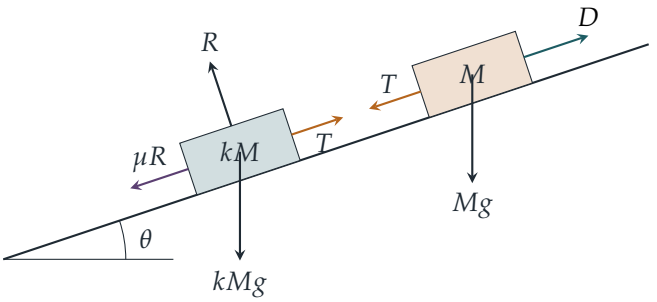
鍵となる考え方

3 つの状況それぞれについて、トラックとトレーラーに対して別々にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を書き下す。坂を下ることは、傾斜角 $-\alpha$ の坂を上ることにほかならないので、1 組の方程式で 3 つの場合すべてを扱える。(i) の関係式は、トラックの方程式だけからほぼ自動的に得られる。(ii) は、結局のところ $1-\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ の大小比較に帰着する。

解答

トラックとトレーラーを、運動の方向に沿った軽い剛体の棒でつながれた質点としてモデル化する。両者はトラックの進む向きに動くので、トレーラーにはたらく摩擦力（friction）は運動を妨げる向きにはたらき、その大きさは μR である。ここで R はトレーラーにはたらく垂直抗力（normal reaction）である。張力（tension）T はトレーラーを前方へ、トラックを後方へ引く。（もし T が負になれば、棒には圧縮力（thrust）がはたらいていることになるが、計算は変わらない。）

坂の傾斜角を θ とし、$\theta=\alpha$ が上り坂、$\theta=0$ が水平、$\theta=-\alpha$ が下り坂となるように測る。



坂を上る向きの加速度（acceleration）を a とし、各物体について坂に沿った方向に、またトレーラーについては坂に垂直な方向に（$R = kMg\cos\theta$）力を分解すると、次を得る。

$$\text{トラック：} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{トレーラー：} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

(1) と (2) を辺々加えると T が消去される。

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu k g\cos\theta}{1+k}.$$

これを (1) に代入すると $T = D - Mg\sin\theta - Ma$ であるから、

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

$\sin\theta$ の項は打ち消し合うので、張力は $\cos\theta$ を通してのみ θ に依存する。

小問 (i)

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ であるから、$\theta = \alpha$ の場合と $\theta = -\alpha$ の場合の張力は等しい。

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

2 つ目の結果には、3 つの場合のトラックの方程式 (1) だけを用いればよい。

$$Ma_1 = D - T_1 - Mg\sin\alpha,$$
$$Ma_2 = D - T_2,$$
$$Ma_3 = D - T_3 + Mg\sin\alpha.$$

1 つ目と 3 つ目の式を加え、$T_3 = T_1$ を用いると $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$ を得る。ここから中央の式の 2 倍を引くと、

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)(a)

1 つ目の不等式。 (i) より、$a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ は $T_2 > T_1$ と同値である（$M > 0$ であるから）。上の式から、

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu k M g\,(1 - \cos\alpha)}{1 + k} > 0,$$

である。なぜなら、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より $\cos\alpha < 1$ であり、摩擦がはたらくので $\mu > 0$ だからである。したがって $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ である。

2 つ目の不等式。 $\frac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3$ は $a_1 < a_3$ と同値である。a の式において、D の項と摩擦の項は $\theta = \pm\alpha$ で等しいので、

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

（同じことだが、$T_1 = T_3$ を用いてトラックの方程式どうしを引けば $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$ となる。）よって

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3.$$

小問 (ii)(b)

a の式に $\theta = 0$ と $\theta = \alpha$ を用いると、

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1 - \cos\alpha)}{1 + k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1 + k}(1 - \cos\alpha)\right].$$

考えてみよう 坂を上ると加速度が $g\sin\alpha$ だけ失われるが、垂直抗力が小さくなる分だけ摩擦は減る。どちらの効果が勝つだろうか。

摩擦の減少分のほうが小さい。まず、$\dfrac{k}{1 + k} < 1$ かつ $\mu < 1$ であるから、$0 \le \dfrac{\mu k}{1 + k} < 1$ である。次に、半角の公式（half-angle formulae）

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

を用いると、$0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$ であるから $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$ となる。したがって

$$\frac{\mu k}{1 + k}(1 - \cos\alpha) < 1 - \cos\alpha < \sin\alpha,$$

である。ここで 1 つ目の不等号が狭義であるのは、$1 - \cos\alpha > 0$ だからである。よって $a_2 - a_1 > 0$、すなわち $a_1 < a_2$ である。$\mu < 1$ が使われるのはこの箇所である。トレーラーが非常に重く、μ が大きく、坂が急であれば、摩擦の減少分が $g\sin\alpha$ を上回ることもありうる。

検算

- $M = 1000\,\mathrm{kg}$、$k = 0.5$、$\mu = 0.4$、$\alpha = 30°$、$D = 5000\,\mathrm{N}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする。このとき $a_1 \approx -2.698$、$a_2 \approx 2.027$、$a_3 \approx 7.102\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ であり、$T_1 = T_3 \approx 2798\,\mathrm{N}$、$T_2 \approx 2973\,\mathrm{N}$ である。実際、$\frac{1}{2}(a_1 + a_3) \approx 2.202$ は a_2 と a_3 の間に（等号なしで）あり、$a_1 < a_2$ も成り立つ。$\mu < 1$ を満たす多数のランダムなパラメータの組についてコンピュータで確かめたところ、すべての恒等式と不等式が成り立つことが確認された。
- $\mu = 0$ ならば、張力はどの坂でも $kD/(1+k)$ であり、a_2 はちょうど a_1 と a_3 の平均になる。(ii)(a) で摩擦の存在が必要なのはこのためである。
- $\mu = 3$、$k = 100$、$\alpha = 1.5$ ラジアンとすると $a_1 > a_2$ となるので、(b) における条件 $\mu < 1$ は本当に重要である。

よくある間違い

- 坂の上での摩擦力を μkMg としてしまう。坂の上での垂直抗力は $kMg\cos\alpha$ であり、この違いこそが小問 (ii) の内容のすべてである。
- 坂を下るときに重力の成分の符号を間違える。すべてを θ を用いて書き、その後で $\theta = -\alpha$ とおけば、この間違いは避けられる。
- (ii)(b) で、$1 - \cos\alpha$ と $\sin\alpha$ を比較せずに $\mu k/(1+k) < 1$ だけを論じてしまう。両方の事実が必要である。

STEP のその先へ

系をいくつかの物体に分け、それぞれにニュートンの法則を適用し、内力が大きさが等しく向きが反対の対として現れるようにするのは、剛体（rigid body）および多粒子系の力学の基本的な方法である。方程式を足し合わせると重心（centre of mass）の運動が得られ、内力は消える。また、不等式 $1 - \cos\alpha < \sin\alpha$ は、半角の公式を用いて関数を比較するという手法の小さな例であり、この手法は解析学のいたるところで役に立つ。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。