解答例

STEP II 2023、第 8 問

純粋数学 • 空間ベクトル

STEP II 2023、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

3 組の対辺（opposite edges）に名前をつければ、小問 (i) は 3 つの 1 次方程式になる。その後はすべて、$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ を用いて各辺の長さの条件を内積（dot product）の式に書き換えることから導かれる。3 つの内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ をすべて $|\mathbf{a}|^2$、$|\mathbf{b}|^2$、$|\mathbf{c}|^2$ で表してしまえば、小問 (iii) と (iv) は括弧を展開するだけである。

解答

小問 (i)

四面体（tetrahedron）を $OABC$ とする。その 6 本の辺は、頂点を共有しない辺の組 3 つに分けられる：

$$OA \text{ と } BC, \qquad OB \text{ と } CA, \qquad OC \text{ と } AB.$$

$OA = p$、$BC = p'$、$OB = q$、$CA = q'$、$OC = r$、$AB = r'$ とおく。4 つの面の周長（perimeter）は

$$OAB : p+q+r', \qquad OAC : p+r+q',$$
$$OBC : q+r+p', \qquad ABC : p'+q'+r'.$$

である。

四面体が等面四面体（*isosceles tetrahedron*）**ならば**、$p = p'$、$q = q'$、$r = r'$ であり、4 つの周長はいずれも $p+q+r$ に等しい。

逆に、4 つの周長がすべて等しいと仮定する。$X = p - p'$、$Y = q - q'$、$Z = r - r'$ と

おく。はじめの 3 つの面をそれぞれ ABC と比べると

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

3 式をすべて加えると $2(X+Y+Z)=0$ を得る。$X+Y+Z=0$ から各式を順に引くと $Z=0$、$Y=0$、$X=0$ を得る。よって $p=p'$、$q=q'$、$r=r'$ であり、四面体は等面四面体である。これで両方向が示された。

小問 (ii)

$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ であるから、条件 $OA=BC$ は

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

を意味し、これを整理すると求める式 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$ が得られる。

残り 2 組の対辺（$OB=CA$ と $OC=AB$）について同じ議論を行うと

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

を得る。この 2 式を加えると、$|\mathbf{b}|^2$ と $|\mathbf{c}|^2$ の項が打ち消し合う：

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad \text{よって}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

3 つの内積の公式は $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ について対称であるから、同様にして

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

が成り立つ。

小問 (iii)

$S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$ とおく。小問 (ii) で得た $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$、$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ の 3 つの公式を加えると、各長さの 2 乗は正の符号で 2 回、負の符号で 1 回現れるから

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

である。

O からの距離。

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}))=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

A からの距離。 このとき $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$ であり、

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + 9|\mathbf{a}|^2 \\ &= |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} - 6|\mathbf{a}|^2 + 9|\mathbf{a}|^2 \qquad \text{次を用いた：}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 \\ &= |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2) + 3|\mathbf{a}|^2 \\ &= 2S.\end{aligned}$$

よって $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$ でもある。

B と C からの距離。 $\mathbf{a}$ について用いた事実はすべて、$\mathbf{b}$ についても $\mathbf{c}$ についても同様に成り立ち（小問 (ii) の最後）、S も対称である。よって全く同じ計算により $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$ を得る。

したがって、G は 4 つの頂点すべてから距離 $\sqrt{S/8}$ にある。

小問 (iv)

与えられたベクトルを展開する：

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \qquad \text{小問 (ii) より} \\ &= (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

であり、角 BOC は鈍角（obtuse angle）ではない。

> **考えてみよう** これは 12 個ある角のうちの 1 つにすぎない。同じ作業を繰り返さずに、残りすべての角を扱うにはどうすればよいだろうか？

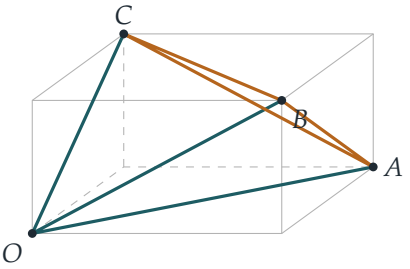
$\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$ で同じ計算をすると $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$ と $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$ が得られ、O における角はどれも鈍角ではない。等面四面体であることは四面体そのものの性質であり、頂点の名前のつけ方にはよらないから、どの頂点を O と呼んでもよかった。したがって同じ議論が A、B、C でも成り立つ。（別の見方として、どの面も 3 辺が p、q、r であるから、4 つの面はすべて合同な三角形である。その角はちょうど O における 3 つの角 BOC、COA、AOB である。）以上より、1 つの頂点で交わる辺のなす角はどれも鈍角ではない。

直角になりうるか？ 等号 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ が成り立つのは $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$、すなわち $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ のときに限る。しかしこのとき A は O、B、C を通る平面上にあり（実際 $OBAC$ は長方形になる）、$OABC$ は平らになって四面体ではない。どの角についても同じことが

言えるので、**どの角も直角にはなりえない**。すなわち、本当の等面四面体では面の角はすべて鋭角である。

検算

- 具体例：辺の長さが x, y, z の直方体（cuboid）をとり、どの 2 つも直方体の辺で結ばれていないような 4 つの頂点を選ぶ。例えば $O = (0,0,0)$、$A = (x,y,0)$、$B = (x,0,z)$、$C = (0,y,z)$ とする。対辺は向かい合う面の対角線なので等しい。$x = 1$、$y = 2$、$z = 3$ とすると $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$、$\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$ であり、確かに $\frac{1}{4}\cdot 36 = 9$ となる。また $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ は直方体の中心であり、どの頂点からも距離 $\sqrt{14}/2$ にある。これは $S = 5+10+13 = 28$ のときの $\sqrt{S/8}$ と一致する。
- 平らな場合：$\mathbf{b} = (3,0,0)$、$\mathbf{c} = (0,4,0)$、$\mathbf{a} = (3,4,0)$ とすると長方形が得られ、その向かい合う「辺」（辺と対角線）は等しく、直角をもつ。これはまさに除外した退化した場合である。
- これらの恒等式は、直方体をもとにした数千個のランダムな例でコンピュータによっても確認した。



よくある間違い

- 小問 (i) で一方向しか証明しない。「必要十分条件（if and only if）」には両方向が必要であり、中身があるのは逆の方である。
- 小問 (iv) で、直角の場合をきちんと除外し忘れる。$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ ならば $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ となり、4 点が同一平面上にあることになる。
- O における角だけを調べて終わりにしてしまう。残り 3 つの頂点でも同じことが成り立つ理由を述べること。

STEP のその先へ

上の直方体の図がすべてを物語っている。すべての等面四面体（ディスフェノイド（disphenoid）とも呼ばれる）は、直方体の頂点を 1 つおきに選ぶことで得られる。すると小問 (iii) は重心（centroid）が直方体の中心であることを、小問 (iv) は直方体の辺の長さが正であることを述べていることになる。長さの条件を内積の式に、さらには内積を並べたグラム行列（Gram matrix）に書き換えることは、大学 1 年の線形代数（linear algebra）と幾何学における標準的な道具である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この考え方が展開されるのを見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。