解答例

# STEP II 2023、第 7 問

純粋数学 • 2 つの平方数の和

> **STEP II 2023、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.6 節「**二つの平方数の和**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/two-squares.html

## 鍵となる考え方

2 つの平方数の和（sum of two squares）$x^2+y^2$ は $|x+y\mathrm{i}|^2$ に等しい。すると小問 (i) は、2 つの平方数の和どうしの積はふたたび 2 つの平方数の和になることを述べており、複素数（complex number）を掛け合わせればそれがどの平方数の和になるかがわかる。以降の小問もすべて同じ方針で解ける。各因数を 2 つの平方数の和として表し（近くにある平方数を見つけるとうまくいくことが多い）、それらを掛け合わせればよい。最後の小問ではこの手順を逆にたどり、掛ける代わりに割る。

## 解答

### 小問 (i)

$zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$ であるから、

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

$|zw|$ と $|z||w|$ はともに 0 以上であるから、平方根をとると $|zw|=|z||w|$ が得られ、示すべきことが示された。

以下では 2 乗した形を用いる。すなわち、$z$ と $w$ の実部（real part）と虚部（imaginary part）がともに整数ならば、

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

**小問 (ii)**

ここでは $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$ かつ $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$ である。積は

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

であるから、小問 (i) より $9^2+32^2 = 5\times 221$ となる（実際、$81+1024 = 1105$ である）。したがって $h=9$、$k=32$ とすればよい。

代わりに（絶対値（modulus）が等しい）$10-11\mathrm{i}$ を用いると $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$ となるので、$h=31$、$k=12$ としてもよい。

**小問 (iii)**

この数は一の位が 5 であるから $8045 = 5\times 1609$ であり、先ほどと同様に $5 = |2+\mathrm{i}|^2$ である。次に 1609 を 2 つの平方数の和として表す必要がある。これは $40^2 = 1600$ よりわずかに大きく、$1609-1600 = 9 = 3^2$ であるから、$1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$ となる。すると

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

であり、小問 (i) より

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

したがって $m=77$、$n=46$ である（代わりに $3+40\mathrm{i}$ を用いると $-34+83\mathrm{i}$ が得られ、$34^2+83^2 = 8045$ も成り立つ）。

**小問 (iv)**

ここで余分な因数は $36 = 6^2 = |6|^2$、すなわち実数 6 の絶対値の 2 乗である。$102+201\mathrm{i}$ に 6 を掛けると、実部と虚部がともにそのまま定数倍される：

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

したがって $p=612$、$q=1206$ である。

**小問 (v)**

方針は、25 をガウス整数（Gaussian integer）を用いて $|\alpha|^2$ と表す異なる方法を 2 通り見つけ、それぞれに 1002082 の 1 つの固定した表し方を掛けることである。

まず、1002082 は $1001^2 = 1002001$ よりわずかに大きく、

$$1002082 - 1002001 = 81 = 9^2,$$

であるから、$1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$ となる。

次に、$25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$ である。これらそれぞれに $1001 + 9\mathrm{i}$ を掛けると、1 組ずつ得られる：

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

小問 (i) より、いずれも絶対値の 2 乗は $25 \times 1002082$ である。実部と虚部の絶対値をとり、小さいほうを先に並べると、$r < s$ を満たす相異なる 3 組は

$$(r, s) = (45, 5005), \qquad (2967, 4031), \qquad (3039, 3977).$$

**考えてみよう** 4 組目を得るために $4 + 3\mathrm{i}$ も使えばよいのではないか？

$4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$ であり、$\mathrm{i}$ を掛けることは（符号を除いて）実部と虚部を入れ替えるだけだからである。これは $(3039, 3977)$ を順序を逆にして再現するだけなので、新しいものは何も得られない。本当に異なる選択は 5、$3 + 4\mathrm{i}$、$3 - 4\mathrm{i}$ の 3 つである。

### 小問 (vi)

今度はこの方法を逆にたどる。ここでも近くの平方数を見つける：$1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$ であるから、

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

であり、さらに $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$ である。整数 $t$、$u$ を用いて $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$ と書くことができれば、小問 (i) より

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

となり、109 で割れば（$109 \times 9193 = 1002037$ を用いて）$t^2 + u^2 = 9193$ が得られる。

そこで、分母と分子に共役複素数（conjugate）$10 - 3\mathrm{i}$ を掛けて割り算を行う：

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

ここで $109 \times 92 = 10028$ および $109 \times 27 = 2943$ を用いた。割り算はちょうど割り切れるので $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$ であり、したがって

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

よって $t = 92$、$u = 27$ である。検算として、$8464 + 729 = 9193$ となる。

**考えてみよう** 割り算が割り切れなかったらどうするか？

そのときはもう一方の共役を試す。代わりに $10 - 3\mathrm{i}$ で割ると $(9992 + 3063\mathrm{i})/109$ となり、これはガウス整数ではない（9992 は 109 の倍数ではない）。109 は素数（prime）であるから、2 つの選択のうちどちらか一方は必ずうまくいく。これは後の「STEP のその先へ」で触れるガウス整数の性質である。$1001 - 6\mathrm{i}$ を割っても、これらの共役が得られるだけで新しいものは何も得られない。

## 検算

各答えは直接計算で確かめられる：$9^2 + 32^2 = 1105 = 5 \times 221$、$77^2 + 46^2 = 5929 + 2116 = 8045$、$612^2 + 1206^2 = 1828980 = 36 \times 50805$、(v) については $45^2 + 5005^2$、$2967^2 + 4031^2$、$3039^2 + 3977^2$ のいずれも 25052050 に等しく、さらに $92^2 + 27^2 = 9193$ である。コンピュータで探索するとこれらが確認でき、さらに $25 \times 1002082$ には $0 < r < s$ を満たす表し方が実は 6 通りあることがわかる（残りの 3 組は $(721, 4953)$、$(2079, 4553)$、$(2395, 4395)$ である）。これらは 1002082 自身の 2 つ目の表し方から生じるものなので、相異なる 3 組であればどれを答えてもよい。同様に、$9193 = 48^2 + 83^2$ も成り立つ。

## よくある間違い

- (v) で、$(3 + 4\mathrm{i})$ と $(4 + 3\mathrm{i})$ が異なる組を与えると数えてしまう。実際には、これらは順序が逆なだけの同じ組を与える。
- (vi) で、誤った共役で割って整数でない結果を得てしまい、そこであきらめてしまう。もう一方を試すこと。
- 積を展開するときに $\mathrm{i}^2 = -1$ の符号を誤る。最終的な平方和は必ず直接確かめること。

## STEP のその先へ

$a, b$ を整数とする数 $a + b\mathrm{i}$ 全体は**ガウス整数**をなし、これは通常の整数と同様に素因数分解（factorisation into primes）が一意的である環（ring）である。通常の素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ は $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$ と分解する。これがフェルマー（Fermat）の二平方定理（two-squares theorem）である。これらの因数の振り分け方を数えると、ある数が何通りの表し方をもつかが正確に説明でき、1002082 が今回用いた表し方以外にも表し方をもつ理由もわかる。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は 2 つの平方数の和を見事に扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）はガウス整数を環として扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。