解答例

STEP II 2023、第 6 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の行列恒等式

> **STEP II 2023、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

フィボナッチ数（Fibonacci numbers）をひとつの 2×2 行列（matrix）の累乗の成分としてまとめてしまえば、それらに関する恒等式（identity）はすべて $\mathbf{Q}$ の累乗に関する恒等式となり、通常の代数（指数法則（index laws）、行列式（determinant）、二項定理（binomial theorem））がその仕事を引き受けてくれる。各小問は同じ手順に従う。すなわち、同じ行列を 2 通りに表し、ひとつの成分を読み取るのである。その成分はほとんどの場合右上の成分であり、それは F_n そのものである。

解答

行列の公式

$n = 1$ のとき、左辺は $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$ である。$F_2 = F_1 + F_0 = 1$ だからである。よって $n = 1$ のとき結果は成り立つ。

ある $n \geq 1$ について成り立つと仮定する。すると

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

となる。ここで漸化式（recurrence）を 2 回用いた。これは公式の n を $n+1$ に置き換えたものであるから、数学的帰納法（induction）により、すべての正の整数 n について成り立つ。

小問 (i)

行列式は乗法的であるから、$\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$ である。同じ行列式を成分から計算すると

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

となり、したがって求めるとおり $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ である。（これはカッシーニ（Cassini）の恒等式である。）

小問 (ii)

指数法則より $\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ である：

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

積の右上の成分は $\mathbf{Q}^m$ の第 1 行と $\mathbf{Q}^n$ の第 2 列の積、すなわち $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$ である。右上の成分を比較すると

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

を得る。

小問 (iii)

直接計算すると

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

である。（これは黄金比（golden ratio）が満たす方程式 $x^2 = 1 + x$ の行列版である。）

以下の小問では、$\mathbf{Q}^k$ の右上の成分がすべての $k \geq 1$ について F_k であること、さらに $k = 0$ についても、$\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$ の右上の成分が $0 = F_0$ であることから同様であることに注意する。行列の和の右上の成分をとる操作は線形であるから、$\sum c_k\mathbf{Q}^k$ の右上の成分は $\sum c_kF_k$ である。

(a) $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$ と、$\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ とした二項定理を用いると

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

となる。左辺の右上の成分は F_{2n} であり、右辺のそれは $\sum_k \binom{n}{k}F_k$ である。よって $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}F_k$ である。

(b) まず同じやり方で $\mathbf{Q}^3$ を求める：

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}+\mathbf{I}+\mathbf{Q} = \mathbf{I}+2\mathbf{Q}.$$

次に $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$ として二項定理を適用すると

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I}+2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\mathbf{Q}^k,$$

となり、右上の成分を比較すると $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k F_k$ を得る。

2 つ目の恒等式については、$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n\mathbf{Q}^{2n}$ と書き、(a) の展開を用いる：

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{Q}^{n+k}.$$

$\mathbf{Q}^{n+k}$ の右上の成分は F_{n+k} であるから、$F_{3n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{n+k}$ である。

(c)

> **考えてみよう** 符号 $(-1)^{n+k}$ を生み出すには、どの行列を n 乗すればよいだろうか？

符号 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$ は、$(\mathbf{Q}-\mathbf{I})^n$ を展開したときに現れるものである。使うことが許されている二項定理の形に合わせるため、$\mathbf{Q}-\mathbf{I} = -(\mathbf{I}+(-\mathbf{Q}))$ と書くと

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{I})^n = (-1)^n(\mathbf{I}+(-\mathbf{Q}))^n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

となる。$\mathbf{Q}^n$ を掛けると

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n(\mathbf{Q}-\mathbf{I})^n = (\mathbf{Q}(\mathbf{Q}-\mathbf{I}))^n,$$

である。最後の変形が許されるのは、$\mathbf{Q}$ と $\mathbf{Q}-\mathbf{I}$ が可換（commute）であり（どちらも $\mathbf{Q}$ の多項式（polynomial）である）、因子を組み替えられるからである。ところが (iii) より $\mathbf{Q}(\mathbf{Q}-\mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2-\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ であるから、和全体は $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$ に等しい。

$\mathbf{I}$ の右上の成分は 0 であり、一方、左辺のそれは $\sum_k(-1)^{n+k}\binom{n}{k}F_{n+k}$ である。したがって

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}F_{n+k} = 0.$$

である。おまけとして、左上の成分からは $\sum_k(-1)^{n+k}\binom{n}{k}F_{n+k+1} = 1$ が得られる。

検算

▶ (i) で $n=5$ とすると：$F_6F_4 - F_5^2 = 8\cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$。

- (ii) で $m=3$、$n=4$ とすると：$F_4F_4+F_3F_3=9+4=13=F_7$。
- (a) で $n=4$ とすると：$0+4\cdot1+6\cdot1+4\cdot2+1\cdot3=21=F_8$。
- (b) で $n=3$ とすると：$3\cdot2\cdot1+3\cdot4\cdot1+8\cdot2=34=F_9$、また $F_3+3F_4+3F_5+F_6=2+9+15+8=34$。
- (c) で $n=3$ とすると：$-F_3+3F_4-3F_5+F_6=-2+9-15+8=0$。

5 つの恒等式はすべて、59 以下のすべての n について（(ii) では 49 以下のすべての m,n について）コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- (ii) で誤った成分を比較したり、行と行を掛けたりすると、もっともらしく見えるが誤った公式が得られる。$\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ の右上の成分には、$\mathbf{Q}^m$ の第 1 行と $\mathbf{Q}^n$ の第 2 列を用いる。
- 可換でない行列に対して $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n$ の二項定理を用いること。ここではすべての行列が $\mathbf{Q}$ の多項式なので、すべて可換であるが、そのことは明記しておく価値がある。
- $k=0$ の項を忘れること：この項は $\mathbf{I}$ を与え、その右上の成分は $F_0=0$ である。

STEP のその先へ

関係式 $\mathbf{Q}^2=\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ は、$\mathbf{Q}$ に対するケーリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）である。すなわち、すべての正方行列は自身の特性方程式（characteristic equation）を満たし、ここではそれが $\lambda^2-\lambda-1=0$ である。固有値（eigenvalue）が $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ である $\mathbf{Q}$ を対角化（diagonalisation）すると、F_n に対するビネ（Binet）の閉じた公式が得られる。また、行列の累乗は、繰り返し二乗法（repeated squaring）によって F_n を高速に計算する方法も与える。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、固有値を導入する際に、まさにこの方法でフィボナッチ数を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。